Márcia

FEUSP - Seminários de Ensino de Matemática (SEMA) - 1º semestre de 2008

Coordenação: Prof Dr Nilson José Machado

# Os números irracionais e as calculadoras[1]

Maria Cristina Bonomi
crisb@ime.usp.br

A idéia de que uma calculadora resolve todos os problemas realmente não é verdadeira, matematicamente falando.

Uma ferramenta informática desse tipo na realidade resolve muitos problemas, torna sem sentido diversas perguntas normalmente formuladas pelo professor em sala de aula, pois basta apertar algumas teclas e a questão está resolvida. Nesse sentido, o uso de tal ferramenta pode ser questionado: no processo de ensino/aprendizagem da Matemática, entretanto, não se trata de fazer mais rápido, ganhar tempo na obtenção do resultado de um problema proposto.

Uma calculadora possibilita questionamentos muito ricos e importantes, pois as respostas obtidas muitas vezes são completamente inesperadas e, ao mesmo tempo, falsas. A necessidade de avaliar criticamente os resultados fornecidos por uma máquina desse tipo torna-se imperiosa: não são suficientes os cuidados com a digitação, o respeito à sua sintaxe, a fim de garantir respostas matematicamente corretas.

Devido a essa necessidade, o lugar privilegiado para aprender a manipular esse tipo de ferramenta é justamente na sala de aula de Matemática. Ao mesmo tempo em que processos meramente algorítmicos podem ser realizados com rapidez, evitando situações repetitivas, puramente técnicas, esse tipo de tecnologia[2] pode enriquecer a compreensão conceitual, desde que sua utilização passe pela crítica, abandonando a crença inabalável de que as máquinas não erram e seus resultados são corretos, inquestionáveis. De fato, a programação da máquina busca isso mesmo: resultados corretos.

Mas, apesar dos esforços dos programadores, as máquinas são limitadas. Por mais sofisticadas, aprimoradas, poderosas, sempre existirá a questão de que na memória de cada uma delas cabe apenas um número finito de dígitos; por maior que ele seja, sempre será um número finito. Considerando o universo dos números[3], porém, observamos que a maioria deles possui uma representação decimal infinita, o que torna impossível para qualquer máquina trabalhar com eles: somente poderão ser utilizadas aproximações.

Resultados aproximados são úteis e razoáveis no mundo da engenharia, por exemplo, bem como no campo das simulações, de modo geral. Na construção conceitual do conhecimento matemático, entretanto, não são suficientes.

---

[1] Neste trabalho, utilizamos a calculadora gráfica ALGEBRA FX 2.0 PLUS, da CASIO.
[2] No sentido de LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.*
[3] Estamos nos referindo aos números reais, racionais – cuja representação decimal é finita ou infinita e periódica – ou irracionais, cuja representação decimal é infinita não periódica.

Um supercomputador poderá em poucos segundos construir a maquete de um grande edifício ou copiar determinada obra de arte, mas é totalmente impossível que a máquina sozinha crie, faça escolhas, tome decisões: qual o tamanho, cor, material, textura, qual o objeto a ser representado... As escolhas, as decisões, as críticas são competências intrínsecas do ser humano: o progresso técnico permitirá cada vez mais delegar às máquinas o trabalho físico e mesmo parte do trabalho mental. Mas ao homem sempre caberá o monopólio das atividades criativas e o poder da crítica. Isso não pode ser delegado às máquinas.

## Os registros de representação semiótica

A teoria dos registros de representação semiótica, de autoria do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, tem-se mostrado muito frutífera para a realização de pesquisas no âmbito da Didática da Matemática. Inúmeras investigações têm sido realizadas, inclusive no Brasil, utilizando esse referencial teórico.

No contexto da Psicologia Cognitiva, Duval desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, considerando as mudanças de registros de representação semiótica, que levou à publicação de diversos trabalhos, entre os quais *Sémiosis et penseé humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels* (Duval, 1995).

Em primeiro lugar, em Matemática, *os objetos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente* e o acesso a eles *passa necessariamente por representações semióticas* e *não se deve confundir um objeto e sua representação* (Duval, 2003, p.21). Essa situação é diferente daquela que ocorre em outros campos do conhecimento científico, como na física, química ou biologia.

Segundo o didata italiano Bruno D'Amore, para Duval, não existe *noesis* sem *semiosis*, entendendo por *noesis a aquisição conceitual de um objeto* e por *semiosis, a representação realizada por meio de signos* (D'Amore, p.58).

Tendo claro que o acesso ao objeto matemático se dá por meio de sua representação, é preciso esclarecer os tipos de registros de representação que são utilizados na atividade matemática. Para Duval (Duval, 2003, p.14), existem quatro tipos muito diferentes de registros:

- o registro da língua natural – associações verbais com argumentações e deduções;
- o registro geométrico – figuras geométricas planas ou espaciais, com apreensão operatória e não somente perceptiva, e construção com instrumentos;
- o registro dos sistemas de escritas e cálculo – numérico, algébrico, simbólico;
- o registro gráfico – mudanças de sistema de coordenadas, interpolação e extrapolação.

Por outro lado, a aquisição conceitual de um objeto matemático baseia-se em duas características "fortes":

- o uso de diversos registros semióticos é típico do pensamento humano;
- a criação e o desenvolvimento de novos sistemas semióticos são marcos históricos de progresso do conhecimento (D'Amore, p.60).

Dessa maneira, a fim de criar condições para a apreensão dos conceitos matemáticos, a própria história mostra um caminho importante a ser trilhado que é o de possibilitar a apropriação de diferentes registros, no sentido de poder trabalhar internamente num único tipo de registro, bem como no sentido de transitar de um tipo para outro. No primeiro caso, quando ocorre a utilização de um único tipo de registro, diz-se que as transformações realizadas constituem um tratamento. Quando há trânsito entre um tipo de registro e outro, a transformação realizada é chamada conversão. Segundo Duval, a conversão das representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irredutível a um tratamento (Duval, 2003, p.17).

D'Amore, decididamente comprometido com a teoria de Duval, afirma que a construção dos conceitos matemáticos depende fortemente da capacidade de utilizar vários registros de representação semiótica dos referidos conceitos:

- representando-os em um dado registro;
- tratando tais representações no interior de um mesmo registro;
- fazendo a conversão de um dado registro para outro.

Nesse sentido, a união das três ações – representar, tratar, fazer conversões – sobre os conceitos viria a ser, para esse autor, a construção do conhecimento matemático, ou seja, a *noesis* (D'Amore, p. 62).

## Um novo registro de representação semiótica

Partindo da premissa de que a tecnologia informática, como as outras tecnologias, oralidade e a escrita, identificadas por Pierre Lévy, pode e deve ser utilizada nas aulas, principalmente de Matemática, desde a escolarização básica, no contexto da teoria de Duval, a aposta situa-se na apresentação de um novo registro de representação: o registro informático.

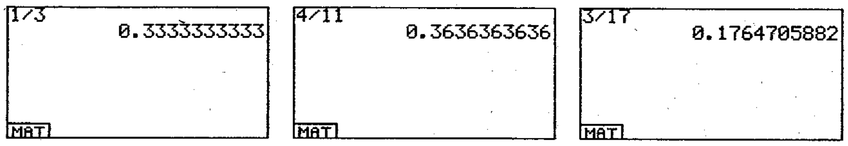
A necessidade de fazer tratamentos nesse registro, bem como de fazer conversões dos outros para esse registro e reciprocamente, é fundamental para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. As limitações da ferramenta geram questionamentos importantes que alimentam a *noesis*.

## Um passeio pelos números

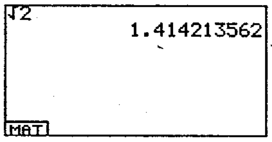
No universo das operações com os números inteiros, trabalhadas nos primeiros anos da escolarização básica, ao efetuar uma divisão é possível que o resultado seja inteiro ou racional. Neste último caso, é possível encontrar quocientes com um número finito, ou não, de casas decimais. Em qualquer caso, o resultado da divisão sempre será um número racional, escrito em sua representação decimal, finita ou infinita e periódica.

Ao efetuar divisões entre inteiros numa calculadora, o resultado apresentado, porém, sempre será com um número finito de casas decimais[4]. Tal resultado, dependendo do caso, será perfeitamente correto, em outros, apenas aproximado. De qualquer forma, uma discussão a respeito será necessária. Em algumas situações, será possível "desconfiar" da existência de um período como no caso das duas primeiras telas abaixo; no caso da terceira, entretanto, não.

[4] De acordo com a ferramenta podem aparecer mais ou menos casas decimais, na dependência da configuração interna da máquina.



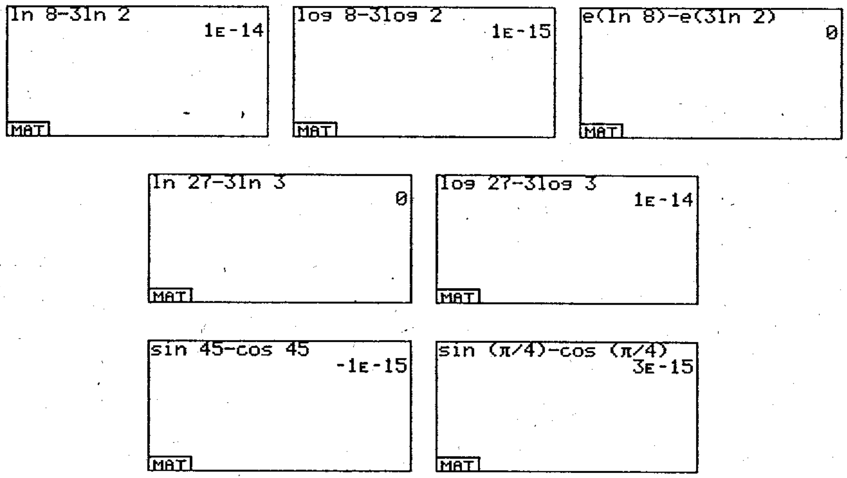

Comparando o resultado do quociente $\frac{3}{17}$ com aquele fornecido para o irracional $\sqrt{2}$ na tela seguinte, observa-se que aparentemente são do mesmo tipo, gerando dúvidas e questionamentos[5].




A compreensão de tais resultados, obtidos num registro desse tipo, pressupõe uma discussão bastante intensa dependendo da faixa etária dos estudantes envolvidos.

Alguns cálculos

Nas telas abaixo é possível visualizar os resultados de alguns cálculos obtidos na calculadora. À primeira vista, é possível imaginar que, por algum motivo, a ferramenta não funcionou e o resultado está errado, uma vez que contraria a teoria conhecida sobre as funções transcendentes envolvidas.




Não é esse o caso, porém. A máquina funcionou conforme sua programação, realizando aproximações e a compreensão desse fato é fundamental para poder-se trabalhar com esse tipo de registro. A reflexão a respeito dos resultados obtidos e a

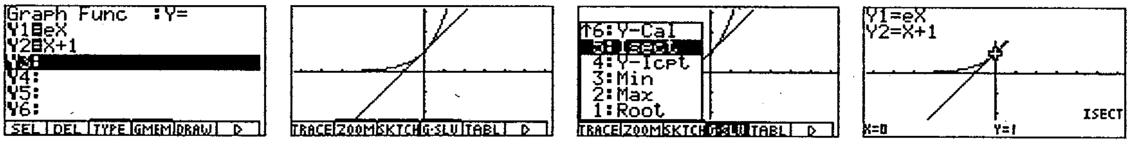
[5] O período do número racional $\frac{3}{17}$ apresenta 16 dígitos.

discussão gerada fortalecem a compreensão dos conceitos trabalhados em outros tipos de registros semióticos.

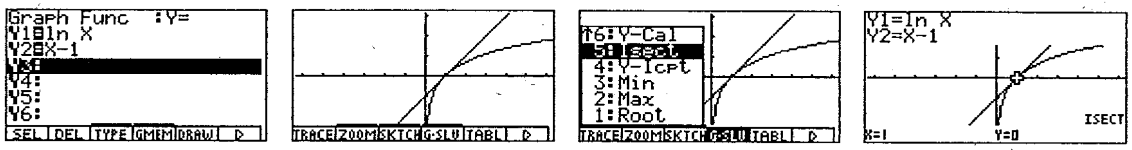
Funções, derivadas, reta tangente ao gráfico num ponto

A calculadora utilizada no presente trabalho permite construir, na mesma tela, o gráfico de uma função bem como o da reta tangente num ponto escolhido. Por meio do comando *Isect* é possível encontrar a intersecção da curva com a reta.

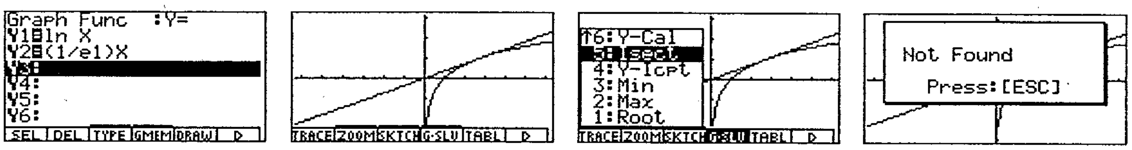
No caso, por exemplo, de $y = e^x$ e da reta tangente $y = x+1$ no ponto $(0,1)$, conforme a última tela da seqüência, obtemos claramente a intersecção esperada:



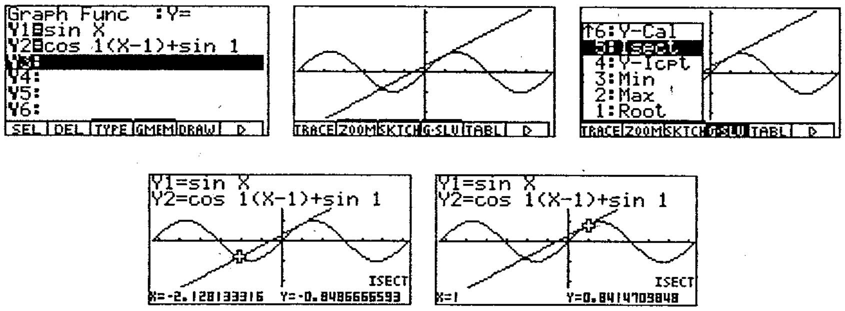

Analogamente, para $y = \ln x$ e a reta tangente $y = x-1$ no ponto $(1,0)$, nenhuma surpresa e o resultado é aquele esperado:



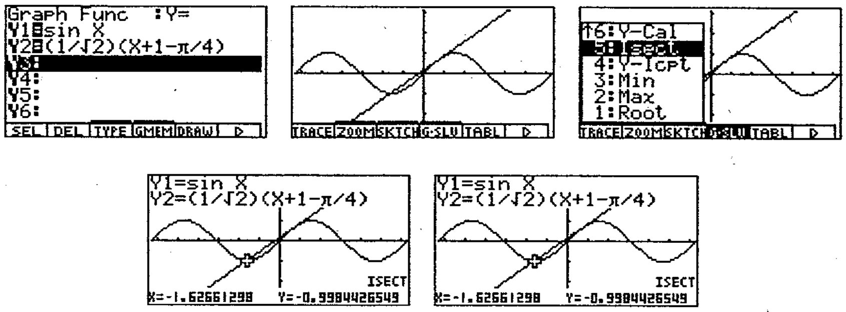

Entretanto, para $y = \ln x$ e a reta tangente $y = \dfrac{1}{e}x$ no ponto $(e,1)$, a máquina não fornece a intersecção óbvia, gerando perplexidade ou até mesmo espanto...




No caso da função $y = \operatorname{sen} x$ e a reta tangente $y = \operatorname{sen} 1 + \cos 1(x-1)$ no ponto $(1, \operatorname{sen} 1)$, as telas abaixo mostram a resposta aproximada fornecida pela calculadora para as duas intersecções da curva com a reta:



Entretanto, ainda no caso da função $y = \text{sen}\, x$ e a reta tangente $y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, a máquina fornece apenas uma intersecção entre a reta e a curva, que, aliás, não é aquela obviamente esperada $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.




Conclusão

Exemplos poderiam continuar... Outra máquina poderia apresentar resultados diferentes, na dependência de como foi programada. Isso não a torna intrinsecamente melhor. Em algum momento, para um determinado problema, sua limitação aparecerá, pois a questão do número infinito de dígitos na representação decimal de um número irracional é um fato em Matemática.

E isso precisa ser claro para o usuário. Nada melhor, pois, do que trabalhar com esse tipo de registro na sala de aula, onde a construção do conceito de número real, passando pelos racionais e pelos irracionais, pretende-se que ocorra.

Bibliografia

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.* Rio de Janeiro: Editora 34, 1995.

D'AMORE, B. *Epistemologia e didática da Matemática.* São Paulo: Escrituras, 2005. Título do original: *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.*

DUVAL, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática* in MACHADO, S.D.A. (org) *Aprendizagem em Matemática.* Campinas: Papirus, 2003.