Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação 2°semestre/2006
Seminários de Estudos em Epistemologia e Didática (SEED-FEUSP)
Coordenador: Nílson José Machado

Algumas faces do infinito

Marisa Ortegoza da Cunha
marisa.ortegoza@bol.com.br

O infinito e...

a Filosofia

Penso em Descartes, que dizia que o cogito *pode proporcionar-nos o sol e o céu; a única coisa que ele não nos pode proporcionar é a idéia de Infinito.*
Emmanuel Levinas

a Física

Só há duas coisas infinitas:
o Universo e a estupidez humana
e quanto à primeira não tenho a certeza.
Albert Einstein

a Matemática

Eu vejo isso, mas não acredito.
Cantor, em carta a Dedekind, em 1877.

Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós.
David Hilbert, em 1925.

a Poesia

Porque o tempo é uma invenção da morte:
não o conhece a vida – a verdadeira –
em que basta um momento de poesia
para nos dar a eternidade inteira.
Mário Quintana – Ah! Os Relógios.

Do que mesmo estamos falando?

Quando falamos em infinito, diferentes idéias parecem misturar-se de modo a sugerir – equivocadamente – uma única interpretação para tal palavra: tamanho tão pequeno (ou tão grande) quanto se queira, quantidade sem limite, algo não mensurável, inalcançável, sem fim, indefinido, a idéia por trás do conhecido símbolo ∞[1], e outras similares a estas.

Além disso, uma simplificação comum é tentar caracterizar o infinito como o não-finito, de modo a induzir a idéia de que o infinito (seja lá o que isso signifique – quantidade, extensão ou representação) seria univocamente determinado.

Veremos dois resultados matemáticos que se contrapõem diretamente a essas idéias: a caracterização de conjunto infinito, estabelecida por Dedekind, a partir da qual o finito é que passa a ser interpretado como a negação do infinito; e a conclusão a que chegou o trabalho ousado e grandioso de Cantor, mostrando que, assim como existem infinitos números finitos (por exemplo, cada número na seqüência dos naturais: 0, 1, 2, 3, 4, ...), há infinitos infinitos. Antes, porém, uma tentativa de ver como algumas das principais faces do infinito – o tamanho do universo, a infinitude ou não do tempo – foram abordadas por importantes pensadores.

Os debates acerca do infinito são anteriores a Platão e Aristóteles. Durante o séc. V a.C., **Zenão** de Eléa (495-435 a.C.), discípulo de Parmênides, enunciou seus famosos paradoxos. Talvez o tenha feito em defesa de seu mestre: Parmênides afirmava que a realidade era um todo imutável, a que chamava de Um. O movimento, a mudança, a multiplicidade eram ilusões. Dois paradoxos de Zenão evidenciam o absurdo a que se chega ao supor a possibilidade de se dividir a matéria infinitamente – dificilmente se poderia dizer que algo com um número infinito de partes fosse uma entidade imutável. O paradoxo mais conhecido talvez seja o de Aquiles e a tartaruga.[2] Outros dois ilustram a impossibilidade da existência de movimento.

Os paradoxos de Zenão chegaram até nós por meio de textos de **Aristóteles** (384-322 a.C.), que os enunciou para criticá-los. Aristóteles negava a possibilidade do que chamava infinito real; admitia apenas a possibilidade de um infinito potencial, e somente na medida em que este não representasse nenhuma realidade física. O infinito potencial seria apenas uma construção do espírito, necessária à resolução de problemas, como ocorre com os números naturais: sempre há um maior do que qualquer outro que imaginemos, mas a totalidade dos naturais não é vislumbrada, é um limite inatingível.

---

[1] Os romanos já usavam o símbolo ∞ como alternativa para representar 1.000. O seu uso como símbolo do infinito foi proposto pelo matemático inglês John Wallis (1616-1703), em 1655. [Menninger, 1992]

[2] A tartaruga desafia Aquiles para uma corrida. Aquiles aceita e dá uma certa vantagem a ela. Zenão afirma que Aquiles jamais alcançará a tartaruga, pois quando ele tiver atingido o ponto de onde ela partiu, ela terá avançado um pouco; novamente, quando Aquiles tiver atingido essa nova marca, a tartaruga terá se deslocado mais um pouco, e assim por diante.

Aristóteles acreditava que o universo fosse finito, fechado na sétima e última esfera e suas idéias influenciaram fortemente todo o pensamento grego. Importante destacar que os filósofos atomistas pré-socráticos, já defendiam a infinitude do universo. A concepção dos atomistas era original e revolucionária: antes deles, ninguém havia imaginado que pudesse haver outros mundos, ou que o nosso mundo – a Terra e aquilo que está em volta dela – fosse apenas uma pequena região em um universo infinito. **Lucrécio** (98-55 a.C.), filósofo grego adepto do atomismo, em sua obra *Sobre a natureza das coisas* [apud Martins, 1992], afirma:

> *Não importa em qual das regiões do universo você está; sempre, seja qual for a posição em que alguém está, o universo fica tão infinito quanto antes, em todas as direções.*

Mas foram as idéias de Aristóteles que dominaram o pensamento grego e, ao evitar o infinito, esse povo estabeleceu uma verdadeira barreira entre si e a realidade. Foi só durante o Renascimento (séc. XV) que o conceito de infinito reapareceu, sendo então estudado e discutido.

Giordano Bruno (1548-1600), um monge dominicano, foi um dos mais importantes filósofos da Renascença. Ele acatou a tese de **Copérnico** (1473-1543) do heliocentrismo, mas refutou a permanência na crença das esferas limitantes. Em seu livro *Acerca do Infinito, do Universo e dos Mundos,* utilizou-se de cinco diálogos entre personagens imaginários, para argumentar contra o finitismo Aristotélico e defender a idéia de que o universo era infinito, contendo uma quantidade infinita de mundos. Um dos argumentos de Giordano Bruno contra a idéia de um limite para o Universo era: o que ocorre se alguém se posiciona na fronteira do Universo e estende o braço para "fora"? Mas o que levou Giordano Bruno às suas concepções não foi o conhecimento astronômico da época, nem a observação. Ele próprio afirmava:

> *Não existe sentido que veja o infinito nem sentido a que se possa pedir essa tal conclusão, porque o infinito não pode ser objeto dos sentidos;... Ao intelecto compete julgar e dar razão das coisas afastadas no tempo e no espaço.*
> *[apud Weil, Pierre, 2005]*

No entanto, ele defendeu a idéia de que um universo finito é incompatível com o poder de Deus, pois, se Deus pudesse criar um universo infinito, por que motivo não o faria? Só há duas respostas possíveis: ou porque não podia ou porque não queria. Mas um Deus que não pode criar um universo infinito não é Deus, pois não é onipotente. E um Deus que pode mas não cria um universo infinito é preguiçoso. Conclui, então, que o espaço é, necessariamente, infinito e preenchido por um Deus onipresente. Giordano Bruno foi queimado pela Inquisição, em 1600, pelas suas idéias.

Outras pessoas continuaram a aceitar e a defender o heliocentrismo, proposto por Copérnico. **Galileu Galilei** (1564-1642) foi um dos mais famosos, tendo proposto uma nova explicação física, diferente da de Aristóteles, para tornar aceitável a Terra se mover em torno do Sol. Por sua defesa da teoria de Copérnico, Galileu foi perseguido pela

Inquisição, mas não recebeu nenhuma penalidade mais grave. Por outro lado, ele se deu conta de que as quantidades de números naturais e de números quadrados perfeitos eram iguais. Contudo, não se aprofundou na questão, preferindo concluir que o infinito possuía um comportamento diferente de tudo o mais e o melhor a se fazer era evitá-lo. Acreditava, contudo, num mundo infinito.

Um dos grandes pensadores da primeira metade do século XVII foi o francês **René Descartes** (1596-1650). Para ele, a infinitude é encontrada em Deus e, em decorrência, o finito se apresenta para o filósofo como uma negação do infinito, e não o contrário. Na sua terceira meditação, onde prova a existência de Deus, o filósofo afirma:

> *E não devo imaginar que não concebo o infinito por uma verdadeira idéia, mas somente pela negação do que é finito, do mesmo modo que compreendo o repouso e as trevas pela negação do movimento e da luz: pois, ao contrário, vejo manifestamente que há mais realidade na substância infinita do que na substância finita e, portanto, que, de alguma maneira, tenho em mim a noção do infinito anteriormente à do finito, isto é, Deus antes que de mim mesmo.*
> *[Descartes, Meditações, 1979.]*

Embora não tenha abordado o assunto diretamente em seus trabalhos, por uma carta sua, de 1692, fica claro que **Isaac Newton** (1643-1727) acreditava que o universo era infinito e que, como Giordano Bruno, o espaço infinito fosse o lugar de Deus. Nessa missiva, dirigida ao clérigo inglês Richard Bentley, Newton argumenta em favor de um universo infinito, pois *Se o universo fosse infinito,...,a gravidade faria toda a matéria do universo se acumular no seu centro.* [apud Morris, 1998].

Encerramos com **Immanuel Kant** (1724-1804), para quem o universo é infinito, compreendendo infinitos mundos. Ele concebe que Deus criou inicialmente um espaço infinito, todo ele cheio de matéria, pois o poder infinito de Deus ficaria sem uso se ele criasse um universo finito. Na "Crítica da Razão Pura", o problema do início do universo e de suas dimensões é discutido como uma "antinomia": um problema aparentemente insolúvel, pois pode-se apresentar argumentos filosóficos muito fortes tanto contra uma solução como contra a sua oposta. Kant discute uma "tese" (de que o universo teve um início no tempo) e também a sua "antítese" (o contrário da tese - de que o universo não teve um início) e mostra que as duas posições são inaceitáveis. O tempo não é finito e não é infinito – não se trata de uma entidade do mundo exterior, mas de uma experiência do espírito.

De qualquer modo, um universo infinito jamais poderia ser diretamente observado: estima-se que o universo exista há cerca de 15 bilhões de anos (quando teria ocorrido o *big bang*). Logo, seria impossível observar qualquer objeto a uma distância maior do que 15 bilhões de anos-luz[3], pois a luz emitida por esse objeto ainda não teve tempo suficiente para chegar até nós. Em outras palavras, o universo observável é finito e a questão "Qual o tamanho do Universo" continua sem resposta.

---

[3] A velocidade da luz é 300.000 km/s. Um ano luz equivale a 300.000 x 365 x 24 x 60 x 60, que é maior do que 9×10^{12} (nove trilhões) de quilômetros.

É interessante destacar que talvez tenha sido **Arquimedes** o primeiro a dar ao infinito um dos sentidos que ele possui na Física – o de uma grandeza ser infinitamente grande (ou pequena) quando comparada a outra. Por exemplo, em alguns contextos, a velocidade da luz, ou a massa do sol podem ser considerados infinitos, frente a outras grandezas envolvidas no problema, bem menores do que elas. Nesse sentido, o infinito físico tem pouco a ver com o infinito matemático, apesar de essa comparação de ordens de grandeza ser de natureza matemática.

O infinito na Matemática

Foram os gregos os primeiros a tomar consciência do problema do infinito, em Matemática, ao tentarem representar a medida da diagonal do quadrado unitário – a uma entidade geométrica finita correspondia um número cuja representação era infinita.

Para Aristóteles, um axioma, uma verdade da razão era a afirmação de que "o todo é maior do que as partes". Trata-se, de fato, uma assertiva verdadeira quando lidamos com grandezas finitas. Pensemos, no entanto, no conjunto dos números naturais:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Não há dúvida de que, se n é um número nessa seqüência, seu sucessor – o número $n+1$ – também o será. Logo, existem infinitos números naturais.
Consideremos, agora, o subconjunto dos naturais formados pelos números pares:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Ora, todos os ímpares (numa quantidade infinita, portanto) foram retirados. Poderíamos, pensar, portanto, e estaríamos em ótima companhia, que o conjunto dos naturais é necessariamente maior do que o conjunto dos pares. No entanto, vejamos a seguinte correspondência entre os elementos desses dois conjuntos:

naturais:	0	1	2	3	4	...	k	...
naturais pares:	0	2	4	6	8	...	2k	...

A cada número natural está associado o seu dobro, que é único. Não falta nem sobra qualquer elemento, em qualquer um dos dois conjuntos: todos estão associados a um e somente um do outro conjunto. Dizemos que os conjuntos em questão estão numa correspondência 1-a-1. Mas como isso é possível?

Esse fato foi tratado como uma espécie de "anomalia", até o final do século XIX, quando **Dedekind** (1831-1916) forneceu, pela primeira vez na história, uma definição de infinito em termos positivos (em vez de "não"-finito, "não"-limitado etc.):

Um conjunto S é infinito se e somente se existe um subconjunto próprio S`de S tal que os elementos de S`podem ser postos numa correspondência 1-a-1 com os elementos de S.

Essa maneira de definir um conjunto infinito introduz duas inovações: trata-se do infinito real, e não mais potencial; além disso, o infinito não é mais a negação do finito; pelo contrário, o finito é que a negação do infinito. Um conjunto finito é aquele que não está em correspondência 1-a-1 com nenhuma de suas partes.

Georg Cantor (1845-1918) foi além dessa definição e estabeleceu a seguinte correlação entre dois conjuntos:

> *Dois conjuntos – finitos ou infinitos – que podem ser relacionados por meio de uma correspondência 1-a-1, possuem a mesma quantidade de elementos.*

Com isso, Cantor instaurou a quantidade de elementos de um conjunto infinito – o infinito como uma cardinalidade[4]. Podemos concluir, então, que o conjunto dos números naturais e sua parte própria, formada pelos números partes, possuem a mesma cardinalidade. Possuem também essa mesma cardinalidade o subconjunto dos naturais formado pelos números ímpares, o subconjunto dos números primos, o dos quadrados perfeitos, dos cubos perfeitos e infinitos outros mais.

E qual a cardinalidade do conjunto dos números inteiros (representado por Z)? Ele contém todos os naturais e mais os seus simétricos. Apesar disso, Cantor estabeleceu uma correspondência 1-a-1 entre os naturais e os inteiros:

N:	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Z:	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	...

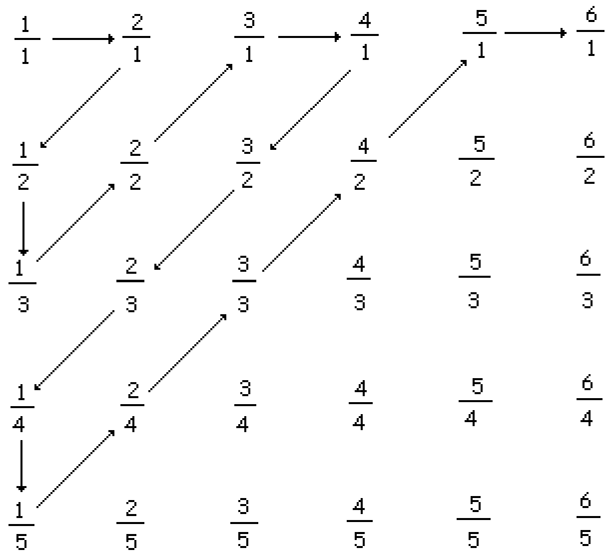
ou seja:

N	$\leftrightarrow$	Z
n par		n/2
n ímpar		- (n+1)/2

Essa correspondência mostra que Z possui a mesma cardinalidade de N. A essa quantidade de elementos Cantor chamou $\aleph_0$ (lê-se álef-zero; $\aleph$ é a primeira letra do alfabeto hebraico) e estabeleceu que todo conjunto com cardinalidade $\aleph_0$ é um conjunto enumerável, visto ser possível criar uma "fila" em que cada elemento ocupa uma determinada posição, numerada. Essa posição é identificada com o número natural associado a ele pela correspondência 1-a-1 entre o conjunto analisado e N.

E quanto ao conjunto Q dos números racionais?[5] Cantor provou que esse conjunto também é enumerável, ou seja, que é possível formar uma fila onde se possa situar cada fração entre todas existentes. Para mostrar isso, Cantor escreveu todas as frações, como a seguir:

[4] Canto usava o termo *potência* para designar a cardinalidade de um conjunto infinito.
[5] O conjunto dos números racionais é formado por todas as razões a/b, onde a e b são inteiros e b não é zero.

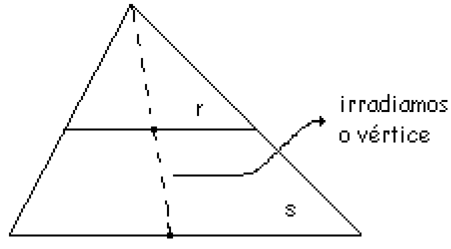


Na primeira linha, estão as frações com denominador 1; na segunda linha, as frações com denominador 2 e assim por diante. Dessa forma, cada fração tem sua posição inequivocamente determinada: o numerador indica a coluna e o denominador indica a linha onde ela se encontra. Logo, a cardinalidade de Q também é $\aleph_0$.

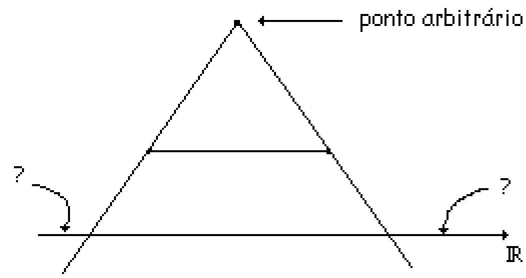
Nesse ponto, a pergunta que surgiu foi: todos os conjuntos infinitos possuem a mesma cardinalidade? O cardinal infinito é único?

Cantor provou que o conjunto R, dos números reais, não é enumerável, existindo, assim, pelo menos dois infinitos distintos. Mostrar que R não é enumerável, é mostrar que não há fila possível de englobar todos os reais. Para isso, primeiramente, Cantor obteve o resultado admirável de que a reta toda possui a mesma quantidade de pontos existentes num segmento de reta qualquer. A seguir, mostrou que o segmento (0,1) não é enumerável.

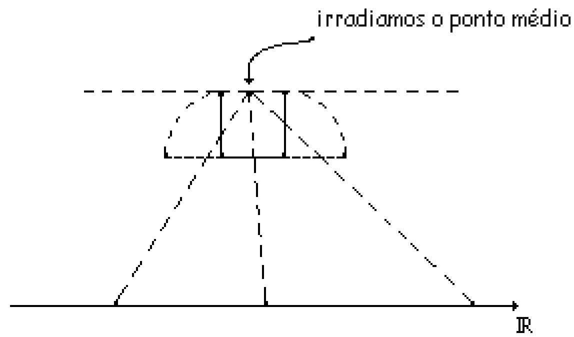
Primeiramente, vamos comparar dois segmentos, *r* e *s*, de comprimentos diferentes e constatar ambos possuem a mesma cardinalidade. Construímos um ângulo como indicado na figura e irradiamos o vértice, fazendo corresponder a cada ponto do segmento *r* um único ponto do segmento *s*.



E no caso de um segmento e a reta toda? Não adiantaria arbitrar um ponto e tentar reproduzir o processo anterior, envolvendo dois segmentos, porque as duas semi-retas indicadas na figura não estão em correspondência com qualquer ponto do segmento. A mesma argumentação não se aplica.



Formemos, então, um "U", com 3 lados de mesma medida:



Irradiando o ponto médio (ver figura), cada ponto do segmento estará relacionado com um (único) ponto da reta e vice-versa. Assim, para mostrar que a reta e não enumerável, basta mostrar que um intervalo qualquer é não enumerável. Vamos escolher o intervalo (0, 1).

Todo ponto nesse intervalo pode ser representado, de forma única, com infinitas casas decimais (por exemplo, o número 0,3 é representado aqui como 0,29999...) na forma $0,a_{ij}$, com infinitos algarismos a_{ij} variando entre 0 e 9. Afirmamos que não há fila que inclua todos os reais desse intervalo. Vamos supor que tal fila exista:

1 $\quad 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16}\ \ldots$
2 $\quad 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\ \ldots$
3 $\quad 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}\ a_{36}\ \ldots$
4 $\quad 0,\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ a_{45}\ a_{46}\ \ldots$
5 $\quad 0,\ a_{51}\ a_{52}\ a_{53}\ a_{54}\ a_{55}\ a_{56}\ \ldots$
...

Vamos construir um número real, pertencente ao intervalo (0, 1), que não está nessa fila. Seja o número $0,\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ \ldots$ construído da seguinte forma:

$x_1 \neq a_{11}$ (logo, nosso número é diferente do primeiro número da fila)
$x_2 \neq a_{22}$ (logo, nosso número é diferente do segundo número da fila)
$x_3 \neq a_{33}$ (logo, nosso número é diferente do terceiro número da fila)
$x_4 \neq a_{44}$ (logo, nosso número é diferente do quarto número da fila)
...
$x_k \neq a_{kk}$ (logo, nosso número é diferente do k-ésimo elemento da fila)

e assim por diante, de modo que o número construído difira de qualquer um já listado, apesar de pertencer ao intervalo (0, 1). Logo, dada qualquer fila que, supostamente, contenha todos os reais de (0, 1), é possível construir um que não está nela.

Conclusão: A cardinalidade de R é MAIOR do que a de N. Cantor chamou a cardinalidade de R de *c* (fazendo menção ao caráter contínuo da reta) e aí já teríamos dois cardinais infinitos distintos. Será que existem outros? Será que *c* é o cardinal que se segue imediatamente a $\aleph_0$?

A resposta à primeira questão é afirmativa, pois Cantor provou que a cardinalidade do conjunto das partes de um dado conjunto – finito ou infinito - é maior do que a cardinalidade do conjunto original. Dado um conjunto A, de cardinalidade *n*, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A é chamado conjunto das partes de A ou conjunto potência de A. A cardinalidade do conjunto potência de A é igual a 2^n. Para n finito, prova-se facilmente que $2^n > n$, para todo n. Cantor estendeu esse resultado para n infinito. Isto é, Cantor criou uma seqüência infinita de infinitos distintos[6]:

$$\aleph_0 \quad < \quad 2^{\aleph_0} \quad < \quad 2^{2^{\aleph_0}} \quad < \quad \ldots$$

A segunda pergunta equivale a "será $c = \aleph_1$" (ou: será $2^{\aleph_0} = \aleph_1$?) Essa conjectura é conhecida como a hipótese do contínuo e foi formulada por Cantor em 1878. Ele tentou em vão demonstrá-la, até o fim da vida. Os resultados dos trabalhos de Gödel e Paul Cohen que a hipótese do contínuo é indecidível, ou seja, não pode ser demonstrada nem refutada, usando-se apenas os axiomas da teoria dos conjuntos.

Os trabalhos de Cantor dividiram a comunidade matemática. Um dos seus principais detratores foi Leopold Kronecker (1823-1891), que havia sido seu professor. e que, juntamente com outros matemáticos conservadores da época, desprezava os estudos sobre os irracionais e o conceito de infinito, tentou impedir a publicação dos primeiros artigos de Cantor. Nesses artigos, Cantor provava a não enumerabilidade dos reais e a equivalência entre o conjunto dos pontos de um quadrado e o conjunto dos pontos de apenas um de seus lados. Essa conclusão foi surpreendente para o próprio Cantor, que emitiu o desabafo em epígrafe, no início deste texto, em carta dirigida a Dedekind. A teoria de Cantor representa a aritmetização dos infinitamente grandes. Alguns anos após a sua morte, Cantor teve seu trabalho amplamente reconhecido pelo matemático **David Hilbert** (1862-1943), que divulgou o conceito do infinito usando a analogia do Hotel natural.

O infinito a serviço dos poetas e cantadores

Muitos poetas se inspiraram na idéia de infinito para cantar o seu amor, as suas dores. Nada melhor – penso eu – para concluir um texto sobre um tema tão perturbador, do que ver alguns poemas que fazem uso de tal idéia.

[6] Diante de infinitos níveis de infinitos, Cantor acreditava que o mais alto, o Absoluto e inatingível, era o próprio Deus. Esse aspecto esotérico da personalidade de Cantor colaborou para que os matemáticos conservadores da época acusassem suas teorias de misticismo ficcional.

O infinito

Giacomo Leopardi
Tradução de Vinícius de Moraes

Sempre cara me foi esta colina erma,
e esta sebe, que de tanta parte
do último horizonte o olhar exclui.
Mas sentado a mirar, intermináveis
espaços além dela, e sobre-humanos
silêncios, e uma calma profundíssima
eu crio em meus pensamentos, e por pouco
não treme o coração. E como o vento
ouço fremir entre essas folhas, eu
o infinito silêncio àquela voz
vou comparando e vêm-me a eternidade
e as mortas estações, e esta, presente
e viva, e o seu ruído. Em meio a essa
imensidão meu pensamento imerge
e é doce o naufragar-me nesse mar.

Soneto da fidelidade

Vinícius de Moraes

De tudo ao meu amor serei atento
Antes, e com tal zelo, e sempre, e tanto
Que mesmo em face do maior encanto
Dele se encante mais meu pensamento.
Quero vivê-lo em cada vão momento
E em seu louvor hei de espalhar meu canto
E rir meu riso e derramar meu pranto
Ao seu pesar ou seu contentamento
E assim, quando mais tarde me procure
Quem sabe a morte, angústia de quem vive
Quem sabe a solidão, fim de quem ama
Eu possa me dizer do amor (que tive):
Que não seja imortal, posto que é chama
Mas que seja infinito enquanto dure.

Como é grande o meu amor por você

Roberto Carlos

Eu tenho tanto pra lhe falar
Mas com palavras não sei dizer
Como é grande o meu amor por você
E não há nada pra comparar
Para poder lhe explicar
Como é grande o meu amor por você
Nem mesmo o céu, nem as estrelas
Nem mesmo o mar e o infinito
Não é maior que o meu amor
Nem mais bonito
Me desespero a procurar
alguma forma de lhe falar
Como é grande o meu amor por você
Nunca se esqueça
Nem um segundo
Que eu tenho o amor
Maior do mundo
Como é grande o meu amor por você.

Excerto de Ode

Álvaro de Campos

Vem, Noite, antiqüíssima e idêntica,
Noite Rainha nascida destronada,
Noite igual por dentro ao silêncio, Noite
Com as estrelas lantejoulas rápidas
No teu vestido franjado de Infinito.

Bibliografia

Descartes. Meditações. In *Os pensadores*. São Paulo: Abril Cultural, 1979.
Kawano, Carmen. *Além do infinito*. Revista Galileu, 149, dezembro/2003.
Kubrusly, Ricardo S. *O tamanho do infinito*. http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/tamanho.html.
Levinas, Emmanuel. *Ética e infinito*. Porto: Edições 70, 1982.
Martins, Roberto de Andrade. *O Universo – Teorias sobre sua origem e evolução*. S. Paulo: Moderna, 1992.
Menninger, Karl. *Number words and number symbols*. New York: Dover Publications, Inc., 1992.
Morris, Richard. *Uma breve história do infinito*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.
Núñez, Rafael E. *Creating mathematical infinities: Metaphor, blending, and the beauty of transfinite cardinals*. Jornal of Pragmatics 37 (2005) 1717-1741.
Serra, Isabel. *Transmutações do infinito*. http://www.triplov.com/coloquio_4/iserra.html.
Weil, Pierre. *Rumo ao infinito*. Petrópolis: Editora Vozes, 2005.

***** *****