

# Seminários de Ensino de Matemática

FEUSP – 2014

Resp. Carlos Nely C. Oliveira

## A fórmula de Herão

### Introdução

1. Alguns resultados preliminares da geometria plana
2. A demonstração original
3. Uma demonstração com trigonometria
4. Uma demonstração com duas circunferências
5. Corolário
6. Herão  $\Leftrightarrow$  Pitágoras
7. Referências

### Introdução

Supõe-se que Herão de Alexandria viveu na segunda metade do século I d.C.

São inúmeros seus trabalhos sobre matemática e física. Quatorze tratados, alguns visivelmente editados várias vezes, chegaram até os nossos tempos. Dentre eles, o mais importante é *A Métrica*, em três livros, só descobertos em 1896, em Constantinopla, por R. Schöne. É nesse livro que se encontra a brilhante dedução da famosa fórmula da área de um triângulo em função dos três lados.

Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados de um triângulo, então sua área  $T$  pode ser expressa por

$$T = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

em que  $s$  é o semiperímetro do triângulo

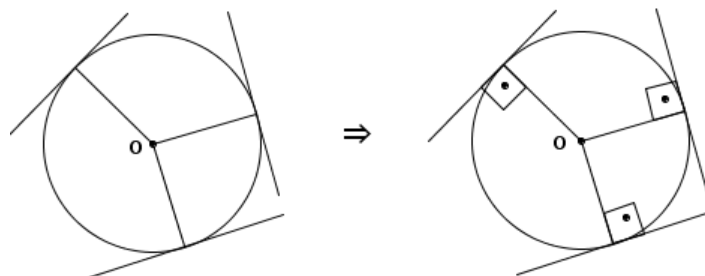
A intenção aqui é apresentar a dedução original, além de outras duas, normalmente não encontradas nos livros didáticos. Também apresentaremos um corolário e a equivalência entre a fórmula de Herão e o teorema de Pitágoras.

Carlos N C Oliveira

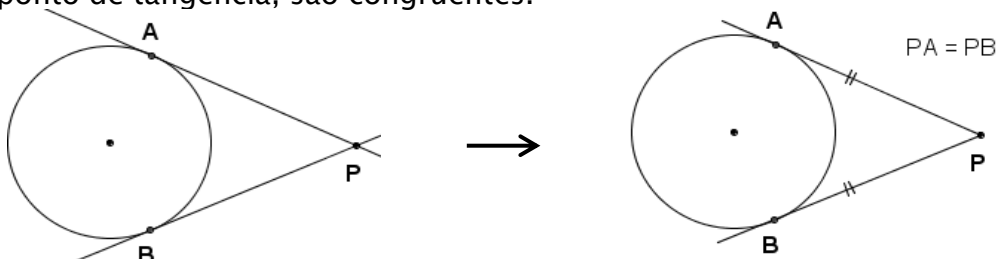
Junho / 2014.

## 1. Alguns resultados preliminares da geometria plana

**Teorema 1.** A retatangente a uma circunferência é perpendicular à reta suporte do raio no ponto de contato.



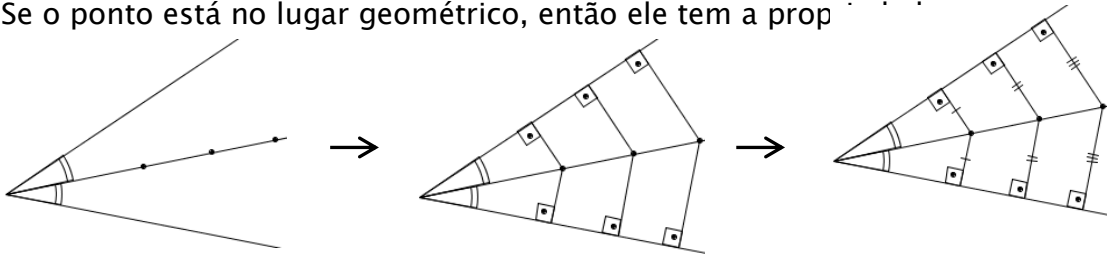
**Teorema 2.** Se, de um ponto  $P$ , externo a uma circunferência, são traçadas tangentes a essa circunferência, então os segmentos cujos extremos são  $P$  e o ponto de tangência, são congruentes.



---

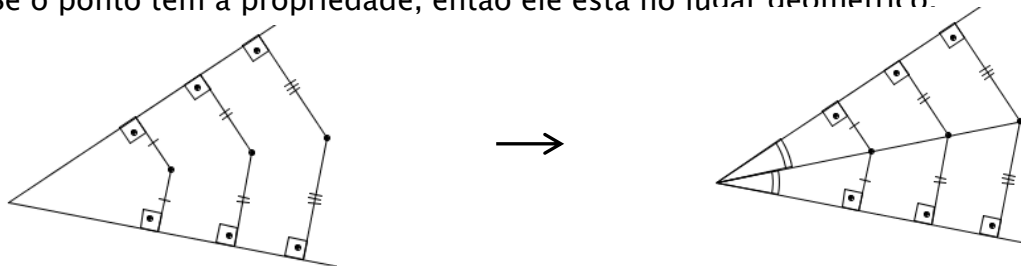
**Teorema 3.** A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico formado pelos pontos que equidistam dos lados desse ângulo.

Se o ponto está no lugar geométrico, então ele tem a propriedade




---

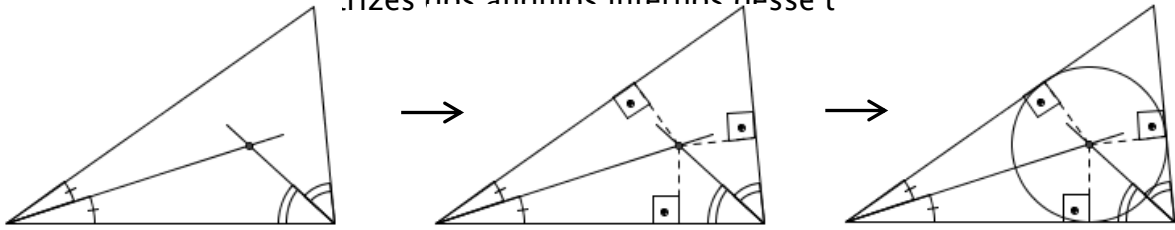
Se o ponto tem a propriedade, então ele está no lugar geométrico.



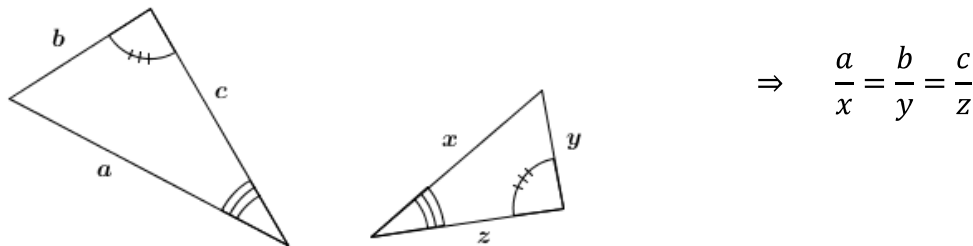
Claro que, se o ponto não tem a propriedade, então ele não está no lugar geométrico.

---

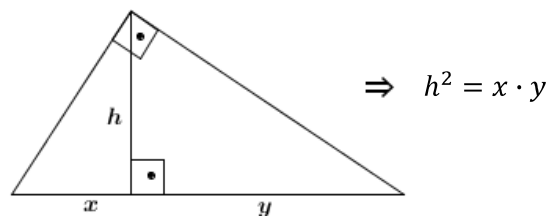
**Teorema 4.** O centro da circunferência inscrita em um triângulo é o ponto de concorrência das bissetrizes dos ângulos internos desse triângulo.



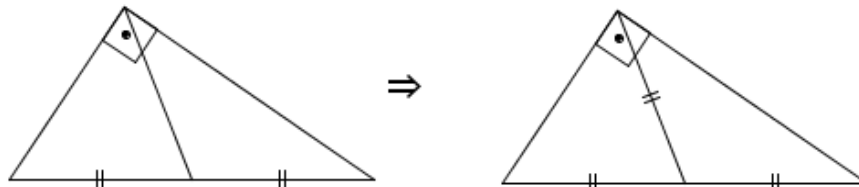
**Teorema 5.** Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então esses triângulos são semelhantes.



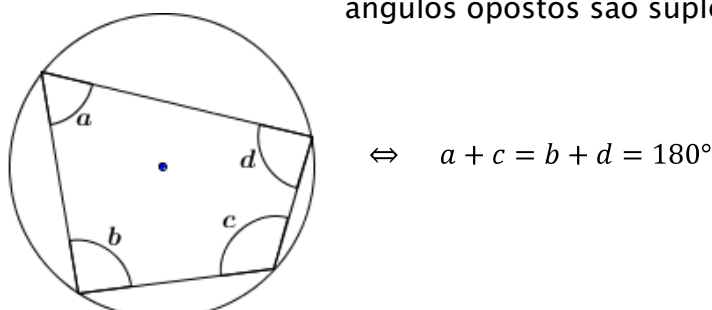
**Teorema 6.** A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é a média geométrica das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



**Teorema 7.** A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.

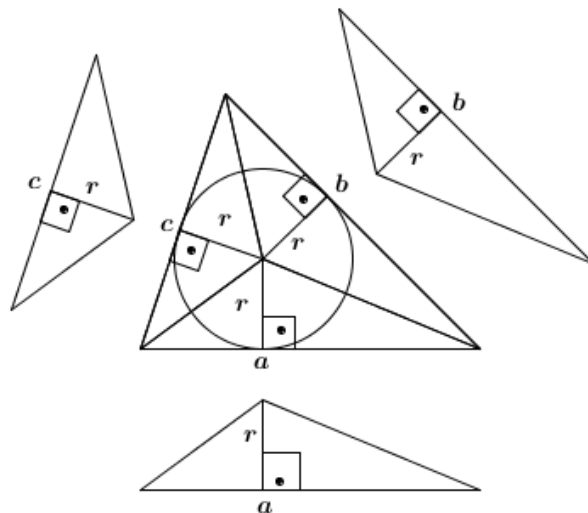


**Teorema 8.** Se ABCD é um quadrilátero inscrito em uma circunferência, então seus ângulos opostos são suplementares.



---

**Teorema 9.** Sendo  $T$ ,  $r$  e  $s$  respectivamente a área, o raio da circunferência inscrita e o semiperímetro de um triângulo qualquer, então  $T = r \cdot s$ .



De fato:

$$T = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$T = r \cdot \left( \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \right)$$

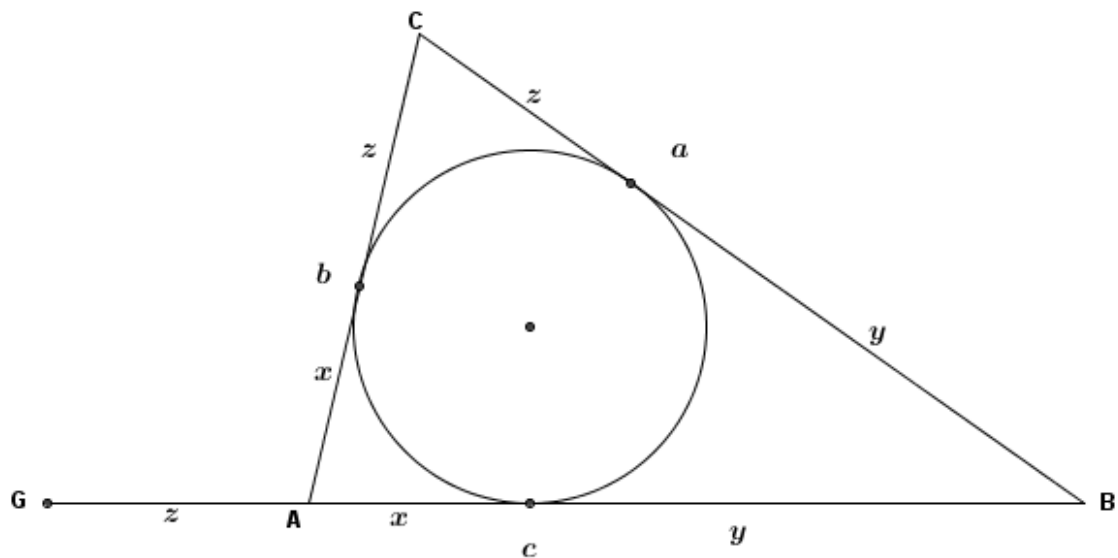
$$T = r \cdot \left( \frac{a + b + c}{2} \right)$$

$$T = r \cdot s$$

## 2. A demonstração original

### Parte A

É interessante e inesperada a construção feita por Herão: primeiramente considerou a circunferência inscrita no triângulo e, depois, pares de triângulos semelhantes que surgem de construções engenhosas feitas na figura original.

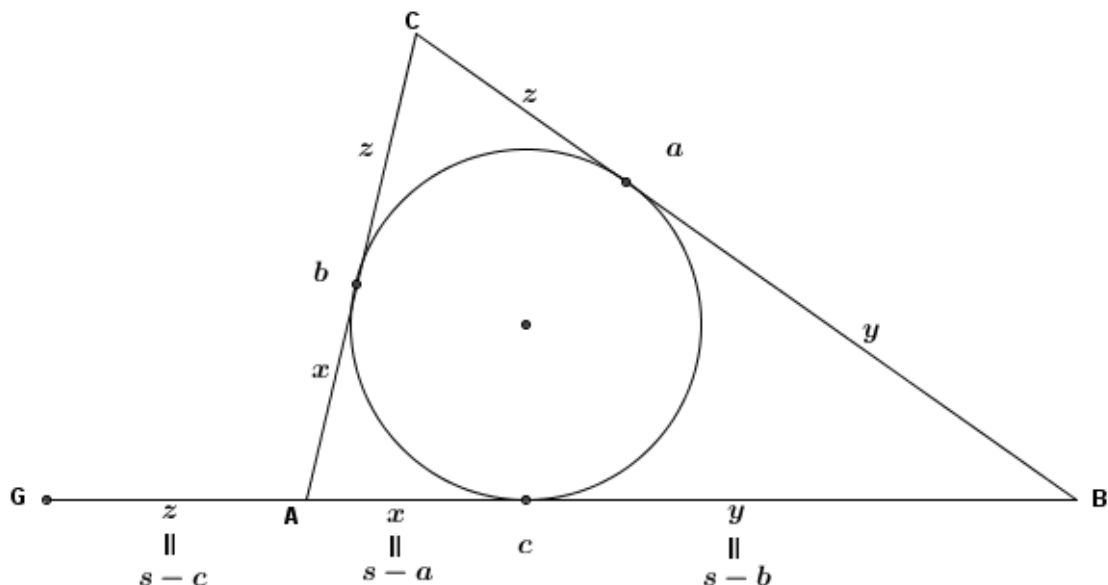


Note que, sendo  $s$  o semiperímetro do triângulo ABC, podemos escrever

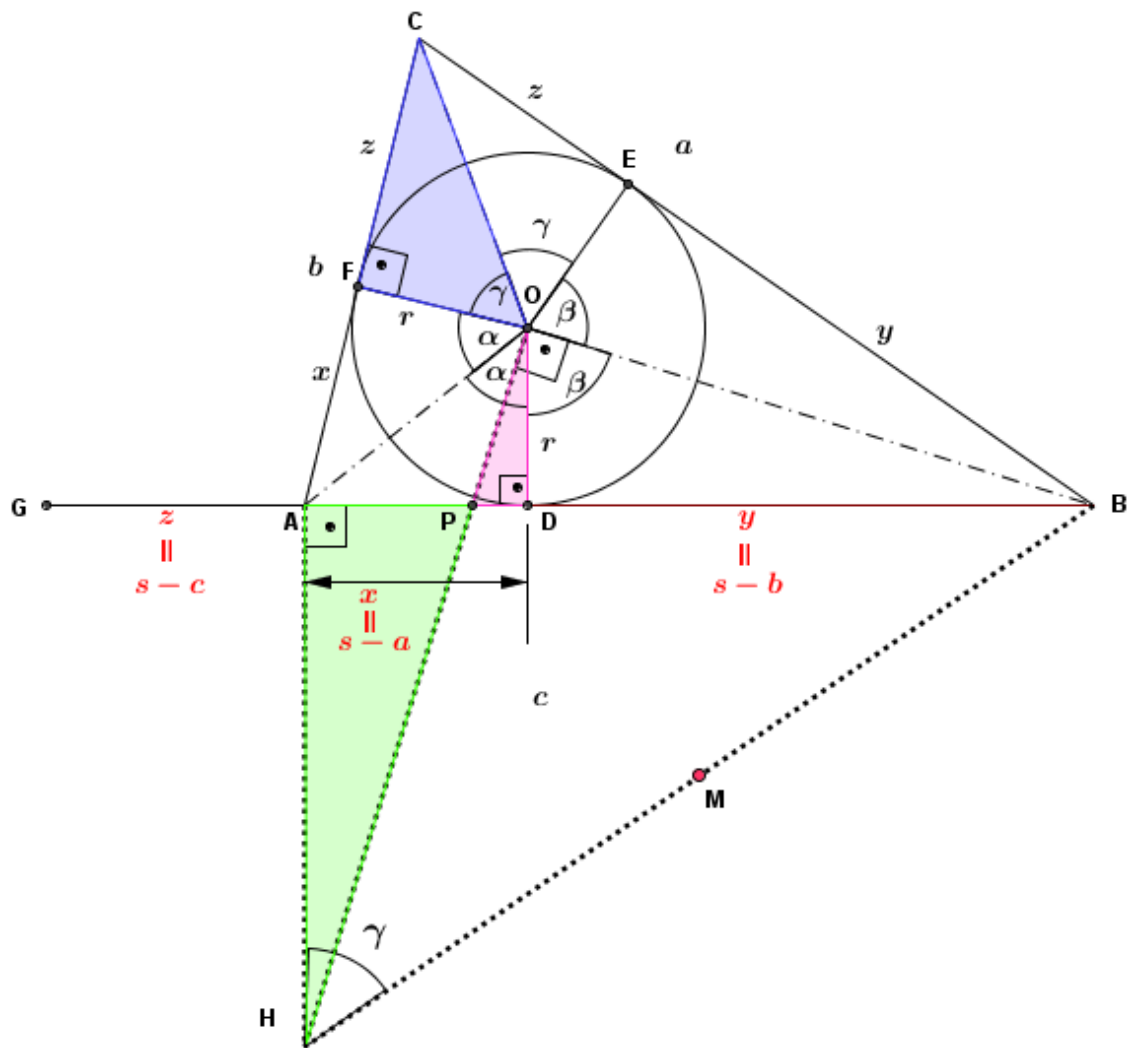
$$1) s = x + y + z$$

$$2) \begin{cases} x + y + z = s \Leftrightarrow x = s - (y + z) \Leftrightarrow x = s - a \\ x + y + z = s \Leftrightarrow y = s - (x + z) \Leftrightarrow y = s - b \\ x + y + z = s \Leftrightarrow z = s - (x + y) \Leftrightarrow z = s - c \end{cases}$$

Portanto, teremos as medidas indicadas na figura a seguir:



## Parte B



(1) Traçam-se:

- pelo vértice A reta perpendicular a BG;
- pelo centro da circunferência a reta perpendicular a OB.

Essas retas intersectam-se no ponto H.

(2) Relação entre os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ :

(3) Os triângulos retângulos ABH e OBH têm a hipotenusa BH em comum. Pelo teorema 7 o ponto médio dessa hipotenusa é equidistante dos pontos A, H, B e O. Portanto o quadrilátero AOBH é inscritível em uma circunferência de centro M e raio  $MA=MO=MB=MH$ .

(4) Pelo teorema 8,

---

(5) Portanto, pelo teorema 5, os triângulos ABH e FCO são semelhantes e podemos escrever que

---

(6) Também pelo teorema 5 são semelhantes os triângulos AHP e DOP, de onde podemos escrever

---

De (5) e (6) pode-se escrever que

(7)

---

(8) Pelo teorema 6, aplicado ao triângulo BOP, tem-se

---

Substituindo (8) em (7), vem que



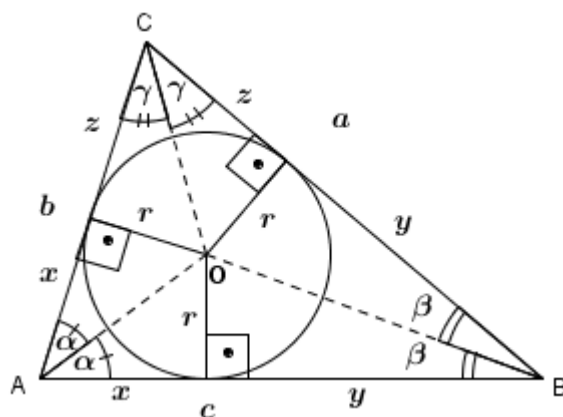
### 3. Uma demonstração com trigonometria

**Teorema 10.** Se  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ , então  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = 1$ .

Demonstração:

$$\begin{aligned}
 1^\circ \text{ membro} &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = \\
 &= \operatorname{tg} \alpha \cdot (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = \\
 &= \operatorname{tg}(90^\circ - \beta - \gamma) \cdot (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = \\
 &= \cotg(\beta + \gamma) \cdot (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma = \\
 &= \left[ \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\sin(\beta + \gamma)} \right] \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} + \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\cos \gamma} \right) + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\cos \gamma} = \\
 &= \left[ \frac{\cos \beta \cos \gamma - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \right] \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \cos \beta}{\cos \beta \cos \gamma} \right) + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\cos \gamma} = \\
 &= \frac{\cos \beta \cos \gamma - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\sin(\beta + \gamma)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\cos \gamma} = \\
 &= \frac{\cos \beta \cos \gamma - \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} = 1 = 2^\circ \text{ membro}
 \end{aligned}$$

### Demonstração da fórmula de Herão



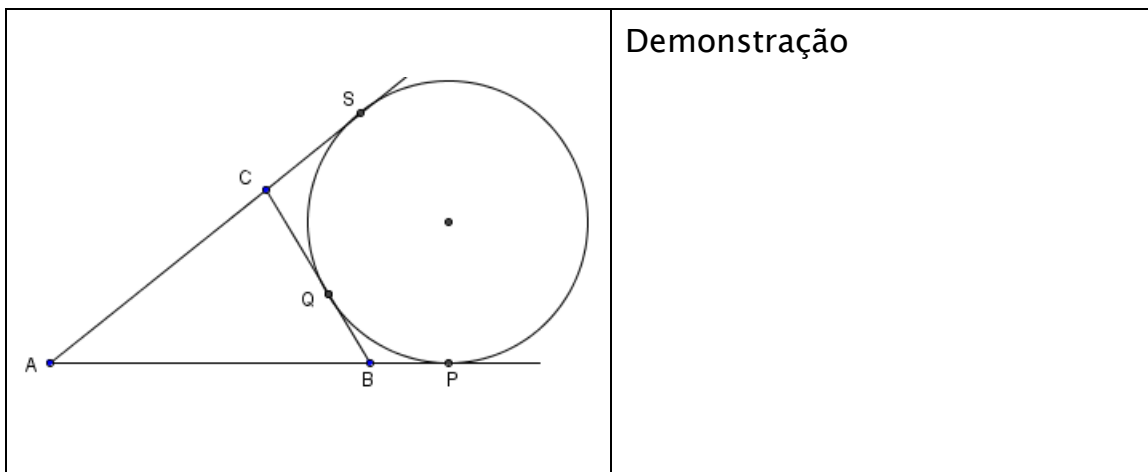
Considere a circunferência de raio  $r$ , inscrita no triângulo  $ABC$  e os pares de triângulos retângulos e congruentes determinados pelas bissetrizes dos ângulos internos.

Tem-se:  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$ . Logo,  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ .

Aplicando o teorema anterior, teremos:

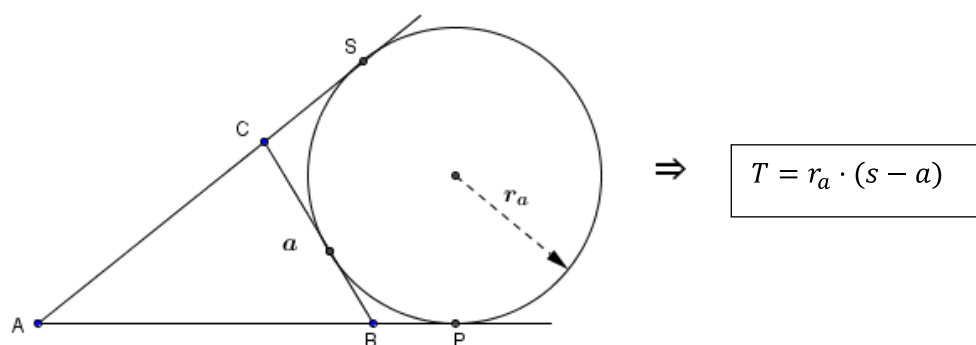
#### 4. Uma demonstração com duas circunferências.

**Lema 1.** Na figura abaixo, o segmento AP tem comprimento igual ao semiperímetro do triângulo ABC.

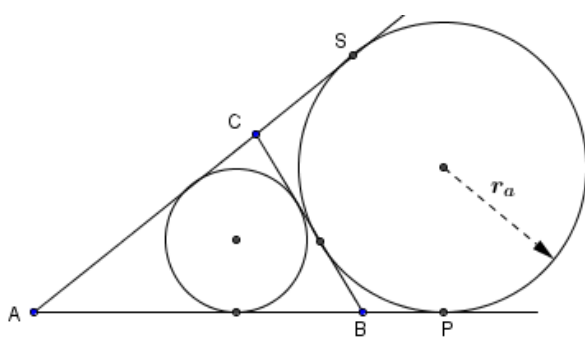


**Definição:** uma circunferência é chamada de ex-inscrita de um triângulo quando ela tangencia um lado do triângulo e o prolongamento dos outros dois.

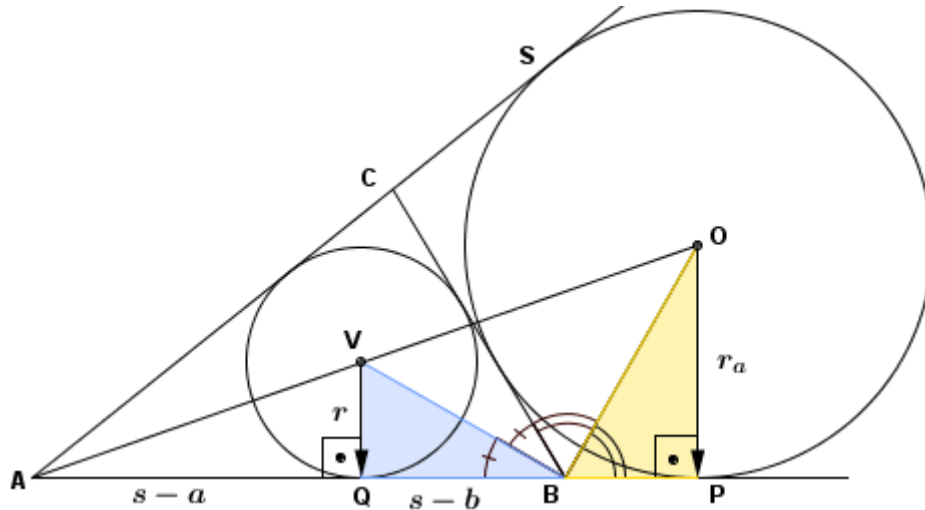
**Lema 2.** A área  $T$  de um triângulo qualquer, de perímetro  $2s$ , que tem uma circunferência ex-inscrita de raio  $r_a$  tangenciando o lado de medida  $a$  é expressa por  $T = (s - a) \cdot r_a$



**Demonstração**



## Demonstração da fórmula de Herão



(1) Sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos lados respectivamente opostos aos vértices A, B e C do triângulo ABC, tem-se então as medidas  $s - a$  e  $s - b$ , como indicadas na figura acima (vide início da demonstração original da fórmula de Herão à página ....)

---

(2) Pelo lema 1,  $AP = s$ , sendo  $s$  o semiperímetro do triângulo ABC. Logo:

$$AB + BP = s \Leftrightarrow c + BP = s \Leftrightarrow BP = s - c$$


---

(3) Da semelhança entre os triângulos BQV e OPB, temos:

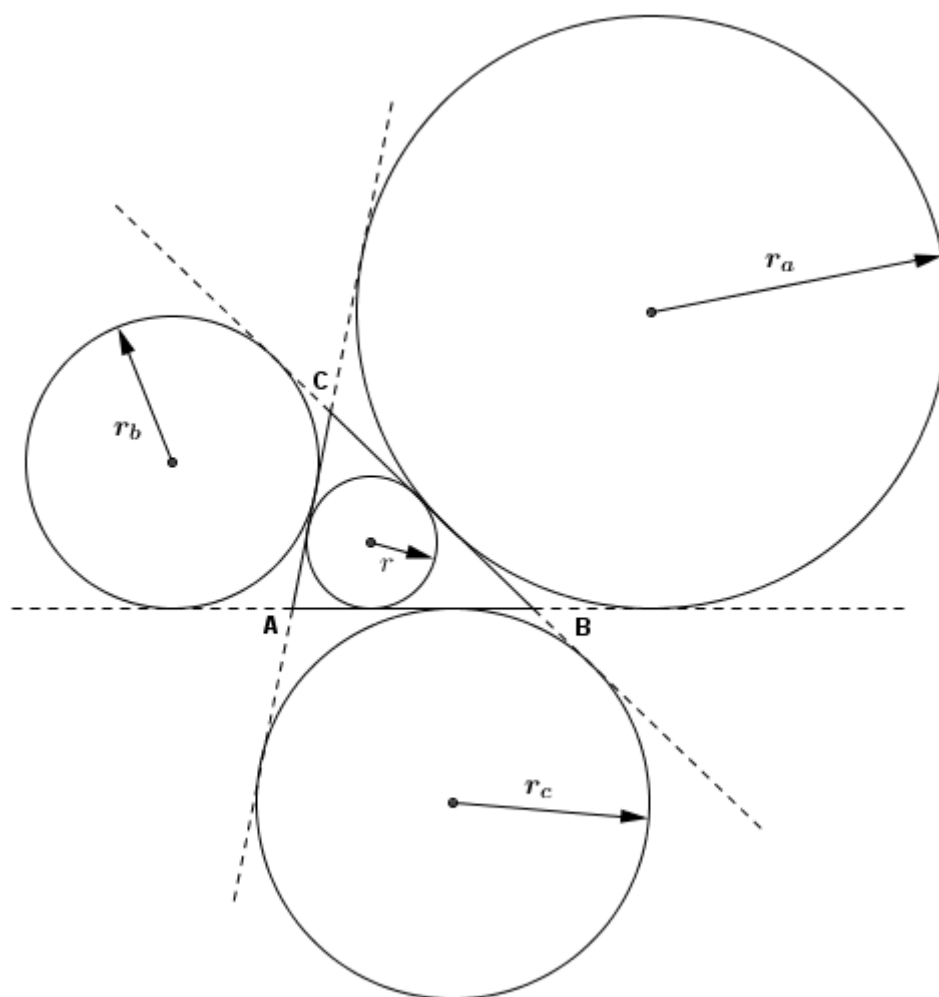
(4) Pelo Lema 2,  $T = r_a \cdot (s - a)$

---

(5)



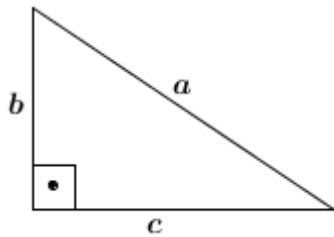
## 5. Corolário



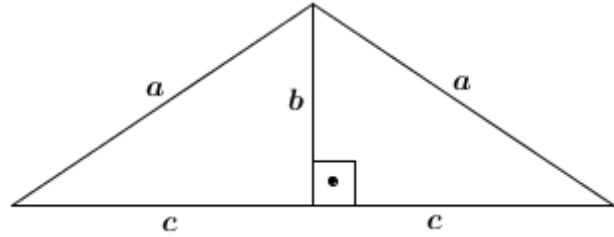
## 6. Herão $\Leftrightarrow$ Pitágoras

( $\Rightarrow$ )

Seja um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ .

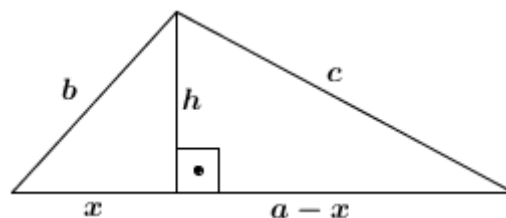


Sempre é possível duplicá-lo como mostrado abaixo.



Aplicando a fórmula de Herão ao triângulo de lados  $a$ ,  $a$  e  $2c$ , teremos:

( $\Leftarrow$ ) Consideremos um triângulo qualquer cujo maior lado tem medida  $a$  e, os outros dois, medidas  $b$  e  $c$ . Tracemos a altura  $h$ , relativa ao maior lado.



(1) Sendo a área do triângulo o semiproduto da base pela altura correspondente, vem que

$$T = \frac{ah}{2} \Leftrightarrow 2T = ah \Leftrightarrow 4T^2 = a^2h^2$$

(2) Para eliminar o  $h$  da equação em (1), aplicamos Pitágoras ao triângulo retângulo da esquerda:

$$h^2 = b^2 - x^2$$

que, substituindo em (1) nos fornece

$$(3) \quad 4T^2 = a^2(b^2 - x^2) = a^2b^2 - a^2x^2 = (ab)^2 - (ax)^2$$

(4) Falta eliminarmos o  $x$ . Para tal, aplicamos Pitágoras ao triângulo retângulo da direita:

$c^2 = h^2 + (a - x)^2 = b^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2$ , isto é,  $c^2 = b^2 + a^2 - 2ax$ , ou ainda:

$$ax = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

(5) Substituir (4) em (3), implicará em

$$4T^2 = (ab)^2 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2$$



## 6. Referências

Asociación Fondo de Investigadores y Editores; *Geometría una visión de la planimetría*; 6ª edição; Lima; Lumbreras editores, 2012.

Alsina, C.; Nelsen, R.; *Charming Proofs*; Washington, Mathematical Association of America, 2010. ISBN: 978-0-88385-348-1.

Dunham, W.; *Journey through genius*; New York, Penguin Books, 1991. ISBN: 978-0-14-01473-1.

Eves, H.; *Introdução à História da Matemática*; Campinas, Editora UNICAMP, 2005. ISBN: 85-268-0657-2.

Mason, J.; Johnston-Wilder, S.; *Developing thinking in Geometry*; 2ª edição; London, 2006. ISBN: 978-1-4129-1168-9.

Revista do Professor de Matemática; número 57, pp.18-20.