Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação
Seminários de Ensino de Matemática (SEMA)
2º semestre de 2012 ANO V

Dos Vetores aos Tensores:

no meio do caminho, havia os QUATÉRNIONS

(Fragmentos para uma Narrativa)

Nílson José Machado
njmachad@usp.br
www.nilsonjosemachado.net

1# Grandezas, Números, Vetores

Em livros didáticos clássicos, grandeza era tudo o que podia variar; podiam ser discretas ou contínuas. Números eram representantes de grandezas. Contar e medir eram as ações que davam origem a números.

O desenvolvimento da ciência conduziu a grandezas mais sofisticadas, exigindo mais do que os afáveis números naturais, e surgiram as frações, os negativos, os irracionais, os reais, os complexos,...

Concomitantemente, outras ferramentas matemáticas foram desenvolvidas para a representação das grandezas: pares ordenados, vetores, matrizes,...

Uma bifurcação importante na relação números/grandezas ocorre com a distinção entre grandezas escalares, bem representadas por números reais, e vetoriais, que exigem referência a uma direção e um sentido.

Durante algum tempo, a distinção entre números e vetores pareceu suficiente para o matemático, mas tal impressão não durou muito. Desafios cada vez maiores conduziram a novas generalizações/bifurcações. A vida e a Matemática podem ser surpreendentes.

2# Complexos, quatérnions, tensores

Os números complexos (z = a + bI) são instrumentos úteis para a representação de rotações no plano. Para W. R. Hamilton (1805-1865), era natural procurar uma extensão de tal recurso para lidar com rotações no espaço tridimensional. As tentativas de ampliação dos complexos para os triplexos (T = a + bI + cJ) foram infrutíferas, mas Hamilton foi bem sucedido criando os quatérnions, objetos formados pela conjunção de um número real (escalar) e um vetor (três coordenadas): Q = w + xI + yJ + zK.

Para operar com tais objetos, Hamilton criou uma álgebra que realizava, em múltiplos sentidos, uma espécie de síntese entre grandezas escalares e vetoriais. Muitas expectativas foram depositadas em tal síntese, apresentada entre 1843 e 1892 como uma das mais inspiradas criações humanas.

Mas o rumo da investigação matemática mudou e os quatérnions foram quase esquecidos. Einstein e outros apostaram em novo tipo de generalização: os tensores. Até hoje, os quatérnions sobrevivem, mas estão na oposição.

3# Quatérnions, hoje

Sobre os quatérnions, o físico W. Thompson escreveu que eles foram criados <u>após</u> Hamilton ter produzidos seus resultados valiosos, sendo "uma mistura diabólica que perturba quem dela se aproxima". Já o engenheiro e matemático O. Heaviside escreveu, em 1892, que "a invenção dos quatérnions deve ser vista como uma das mais notáveis façanhas do engenho humano, obra de um verdadeiro gênio". Uma curiosidade é o fato de T. Kaczynski, conhecido como *Unabomber,* interessar-se pelos quatérnions, tendo escrito um tratado matemático sobre o tema.

Atualmente, apesar da indiscutível perda de prestígio teórico, os quatérnions têm sido utilizados na descrição da dinâmica do movimento dos corpos em três dimensões, especialmente no caso dos fluidos. São particularmente importantes em computação gráfica, na criação de realidades virtuais, nos simuladores de voos, na programação de games eletrônicos, em robótica, em bioinformática. Também a Geometria dos Fractais tem tirado proveito da criação de Hamilton.

4# Tensores, o que é isso?

Tensores são uma generalização de escalares e vetores. Um tensor de ordem zero é um escalar. Um tensor de ordem 1 é um vetor. Um tensor de ordem dois é ... um tensor mesmo.

No espaço tridimensional, um escalar tem $1 = 3^0$ coordenadas; um vetor tem $3 = 3^1$ coordenadas; um tensor (de ordem 2) tem $9 = 3^2$ coordenadas.

O produto escalar de dois vetores u = (u1, u2, u3) e v = (v1, v2, v3) é u1.v1 + u2.v2 + u3.v3; o produto tensorial dos mesmos vetores é a matriz

$$\begin{bmatrix} u1v1 & u1v2 & u1v3 \\ u2v1 & u2v2 & u2v3 \\ u3v1 & u3v2 & u3v3 \end{bmatrix} \quad \text{que é um tensor.}$$

Um exemplo é o tensor de esforços em uma viga. As forças por unidade de área (pressões ou tensões) em uma seção da viga são representadas pela matriz

$$\begin{bmatrix} Pxx & Pxy & Pxz \\ Pyx & Pyy & Pyz \\ Pzx & Pzy & Pzz \end{bmatrix}$$

onde Pxx representa a tensão na direção do eixo x em uma seção perpendicular ao eixo x, Pxy é a tensão na direção do eixo y em uma seção perpendicular ao eixo x, ... Pzy, a tensão na direção do eixo y em uma seção perpendicular ao eixo z...

As tensões Pxx, Pyy, Pzz são efetivamente pressões ou tensões; as outras componentes, são forças ou tensões de cisalhamento.

Nilson/set/2012

Referências Bibliográficas

BOAS, M. L. – Mathematical Methods in the Physical Sciences. New York: Wiley, 1966.
PICKOVER, C. a. – The Math Book. New York: Sterling, 2009
SANTALÓ, Luis A. – Vectores y Tensores con sus aplicaciones. Buenos Aires: EUDEBA, 1969.
WELLS, Dare A – Lagrangian Dynamics. New York: McGraw Hill, 1967.