Seminários de Ensino de Matemática (SEMA–FEUSP)

Coordenação: Nílson José Machado - 2012/1

Marisa Ortegoza da Cunha
marisa.ortegoza@gmail.com

Devlin e os problemas do milênio

8 de agosto de 1900
Congresso Internacional de Matemáticos
Collège de France, Paris

David Hilbert

(1862-1943)

A lista de Hilbert

1. Provar a hipótese do continuum, de Cantor
2. Demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética
3. Prova de que um cubo e um tetraedro possuem volumes iguais, sob certas condições
4. Construção de todos os espaços métricos em que as linhas são geodésicas
5. Provar que todo grupo contínuo é um grupo diferencial
6. Transformar toda a Física em axiomas
7. A potência de base irracional não nula, diferente de 1, e expoente irracional algébrico é transcedente?
8. **A hipótese de Riemann** e a conjectura de Goldbach

A lista de Hilbert

9. Achar a lei de reciprocidade mais geral em todo campo de número algébrico
10. Encontrar um algoritmo que determine se uma equação diofantina tem solução
11. Classificar as formas quadráticas a coeficiente nos anéis algébricos inteiros
12. Estender o teorema de Kronecker-Weber para os corpos não abelianos
13. Demonstrar a impossibilidade de resolver equações de grau 7 por meio de funções de 2 variáveis
14. Provar o caráter finito de certos sistemas completos de funções
15. Desenvolver bases sólidas para o cálculo enumerativo de Schubert
16. Desenvolver uma topologia de curvas e superfícies algébricas

A lista de Hilbert

17. Demonstrar que uma função racional positiva pode ser escrita sob a forma de soma de quadrados de funções racionais
18. Construir um espaço euclidiano com poliedros congruentes. Qual a maneira mais densa de se empacotarem esferas?
19. Provar que o cálculo de variações é sempre necessariamente analítico
20. Todos os problemas variacionais com certas condições de contorno têm solução?
21. Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um determinado grupo monodrômico
22. Uniformizar as curvas analíticas por meio de funções automorfas
23. Desenvolver um método geral de resolução no cálculo de variações

24 de maio de 2000

Clay Mathematics Institute

http://www.claymath_org/prize_problems/index.htm

Os 7 problemas do Milênio

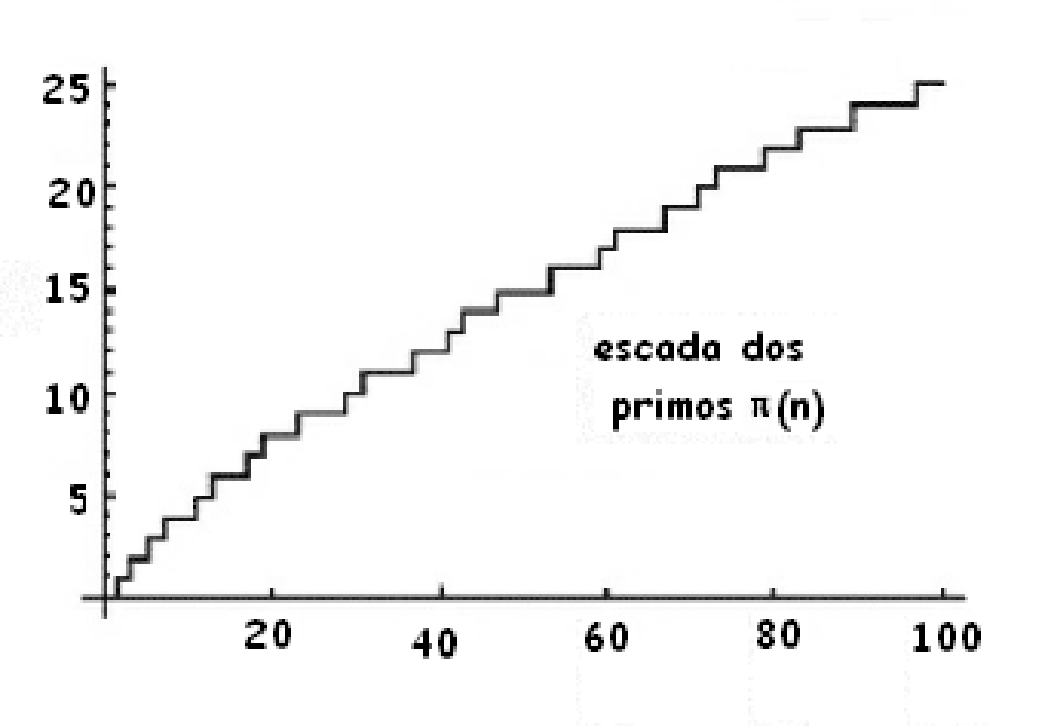
1. A hipótese de Riemann (1859)
2. Teoria de Yang-Mills e a Hipótese da Lacuna da Massa (1950)
3. O problema P *versus* NP (1971)
4. As equações de Navier-Stokes (~1830/45)
5. A conjectura de Poincaré (1904)
6. A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer (1965)
7. A conjectura de Hodges (1950)

1. A hipótese de Riemann (1859)

Georg Bernhard Riemann (1826-1866)

1. A hipótese de Riemann

Gauss: Gráfico da função $\pi(n)$



1. A hipótese de Riemann

Gauss e a dristribuição dos números primos:

n	$\pi(n)$	Quantidade, em média	Variação
10	4	2,5	
10^2	25	4,0	1,5
10^3	168	6,0	2,0
10^4	1 229	8,1	2,1
10^5	9 592	10,4	2,3
10^6	78 498	12,7	2,3
10^7	664 579	15,0	2,3
10^8	5 761 455	17,4	2,4
10^9	50 847 534	19,7	2,3
10^{10}	455 052 511	22,0	2,3

Conjectura (Teorema dos Números Primos): $\pi(n) \approx \frac{n}{\log n}$

2. Teoria de Yang-Mills e a Hipótese da lacuna da massa (1950)

Chen Ning Yang (1922) e Robert L. Mills (1927-1999)

2. Teoria de Yang-Mills e a Hipótese da lacuna da massa

Teoria da Relatividade
Newton
Mecânica quântica

→ **Teoria unificadora**

4 forças da natureza:

gravidade / eletromagnética

nuclear forte / nuclear fraca

partícula → campo

3. O problema P *versus* NP (1971)

- Complexidade computacional
- Algoritmo eficiente

Exemplo: Resolução de um sistema linear nxn

- Por eliminação de Gauss: $(4n^3+9n^2-7n)/6 \approx n^3$
- Por Cramer: $\approx (n+1)!$

3. O problema P *versus* NP

Instância n=20

Computador realizando 100 milhões

de operações por segundo:

- Por eliminação de Gauss: 0,00008 segundos
- Por Cramer: 32 000 anos

3. O problema P *versus* NP

x	2^x	x	x^2	x^3	x^5
2	4	2	4	8	32
5	32	5	25	125	3125
10	1024	10	100	1000	10000
50	$1{,}13 \times 10^{15}$	50	$2{,}5 \times 10^{3}$	$1{,}25 \times 10^{5}$	$3{,}13 \times 10^{8}$
100	$1{,}27 \times 10^{30}$	10^{2}	10^{4}	10^{3}	10^{10}

3. O problema P *versus* NP

- Classe de problema P
- Classe de problemas NP

$$4\,294\,967\,297 \overset{?}{=} 6\,700\,417 \times 641$$

-Classe NP-completo:
o problema do caixeiro-viajante

4. As equações de Navier-Stokes (~1830/45)

Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836)

George Gabriel Stokes (1819-1903)

4. As equações de Navier-Stokes

Notação vetorial:

$$\underbrace{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}}_{\text{massa por unidade de volume vezes aceleração}} = \underbrace{\rho\vec{g}}_{\text{força gravitacional por unidade de volume}} - \underbrace{\nabla p}_{\text{força de pressão por unidade de volume}} + \underbrace{\mu\nabla^2\vec{V}}_{\text{força viscosa por unidade de volume}}$$

4. As equações de Navier-Stokes

Em coordenadas cartesianas:

v: velocidade

P: pressão

g: aceleração da gravidade

ρ : a densidade

μ : a viscosidade

na direção x:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

na direção y:

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

na direção z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

5. A conjectura de Poincaré (1904)

Jules Henri Poincaré
(1854-1912)

Grigori Perelman
(1966)

5. A conjectura de Poincaré

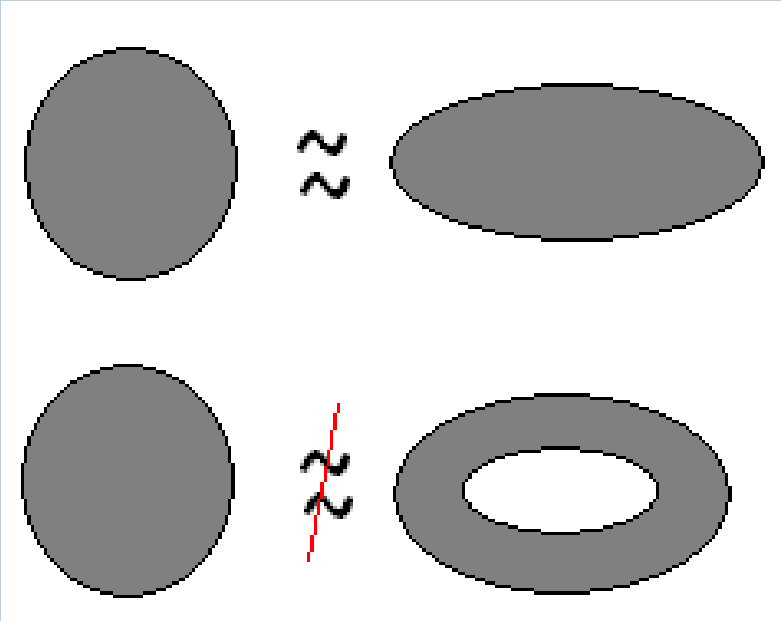
-O que é uma variedade?

-Variedade aberta / variedade fechada

-Variedade simplesmente conexa

- Variedades equivalentes

5. A conjectura de Poincaré



5. A conjectura de Poincaré

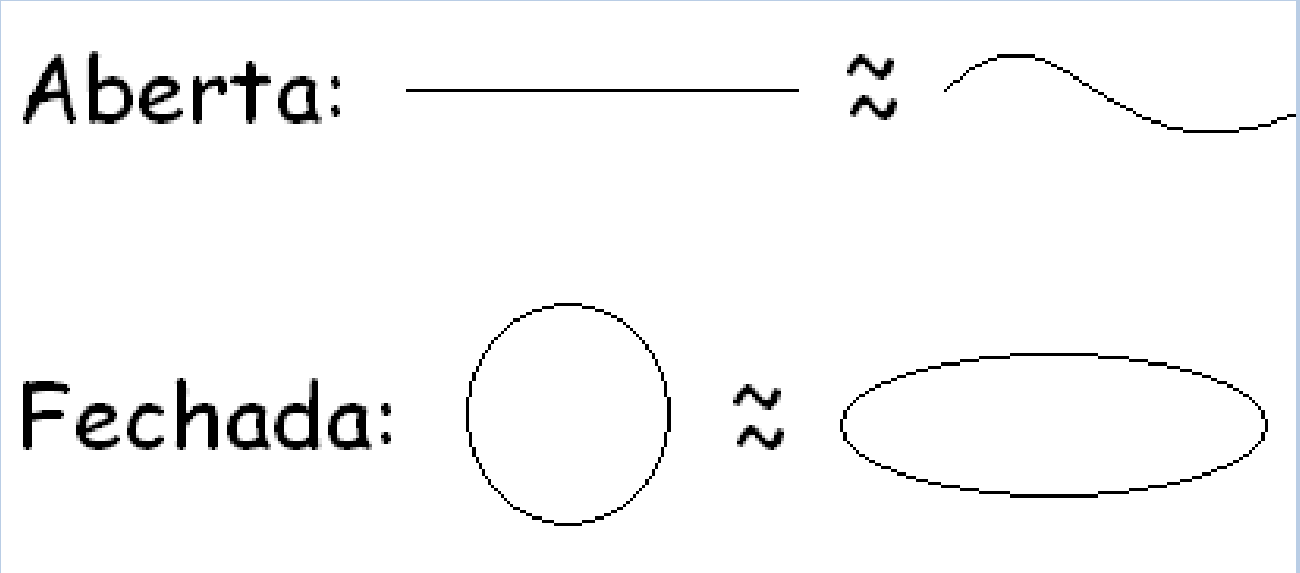
-Problema da classificação:

- Quantas e quais variedades existem?
- Podemos listar todas as variedades, de qualquer dimensão?

A Conjectura de Poincaré é um “pedaço” desse problema de classificação.

5. A conjectura de Poincaré

Classificação de variedades 1-dimensionais:



5. A conjectura de Poincaré

Classificação de variedades de dimensão 2:

"Há exatamente 2 listas de superfícies fechadas; qualquer superfície fechada está numa dessas listas (a menos de homeomorfismos) e quaisquer duas superfícies na mesma lista NÃO são equivalentes."

5. A conjectura de Poincaré

Classificação de variedades de dimensão 2:

1) Superfícies orientáveis

2) Superfícies não-orientáveis

Garrafa de Klein

5. A conjectura de Poincaré:

Toda variedade fechada simplesmente conexa de dimensão d é equivalente à esfera de dimensão d.

("Se uma variedade parece ser a esfera, ela é a esfera")

5. A conjectura de Poincaré:

d = 1: ok

d = 2: ok

d = 4: resolvido, em 1984

(Medalha Fields de **1986** para Michael Freedman)

d >= 5: resolvido, 1960

(Medalha Fields de **1966** para Steven Smale)

d = 3: RESOLVIDO, em **2006**

(Medalha Fields de 2006 para Grigori Perelman, que se recusou a receber...

6. A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer (1965)

Bryan John Birch (1931) e Henry Peter Francis Swinnerton-Dyer (1927)

Curvas elípticas:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

a, b inteiros

com $\Delta = -16(4a^3+27b^2)$ não nulo

6. A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer

Fato: SE existe solução racional da equação original ENTÃO existe solução inteira da congruência correspondente.

Conjectura: SE existirem várias soluções inteiras para as congruências ENTÃO haverá infinitos pontos racionais na curva.

6. A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer

Estratégia:

Np = quantidade de soluções da congruência mod p

Infinitos pontos racionais ⇒

Np grande, para muitos p ⇒

razões p/Np < 1 para infinitos p ⇒

produto das razões igual a zero ... ⇒

6. A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer

Conjectura:

"Se o produto infinito das razões $p/Np = 0$

então a curva elíptica tem infinitos pontos

racionais"

7. A conjectura de Hodge (1950)

William Vallance Douglas Hodge (1903-1975)

7. A conjectura de Hodge (1950)

O mais hermético dos enunciados:

"Toda forma harmônica diferencial (de um certo tipo) sobre uma variedade algébrica projetiva não-singular é uma combinação de classes de co-homologia de ciclos algébricos."

7. A conjectura de Hodge (1950)

Descartes: objeto geométrico → equação algébrica

Equação algébrica → **variedade algébrica**

(geometria sem figura!!)

7. A conjectura de Hodge (1950)

Variedade algébrica projetiva não-singular ~

Superfície suave muldimensional que resulta de uma equação algébrica

Formas diferenciais harmônicas ~

Soluções de uma certa equação diferencial parcial muito importante: equação de Laplace

7. A conjectura de Hodge (1950)

Combinação racional de classes de co-homologias de ciclos algébricos ~

H-objetos: objetos abstratos que surgem ao se aplicar técnicas de cálculo em determinada superfície.

(Traduzindo !!!):

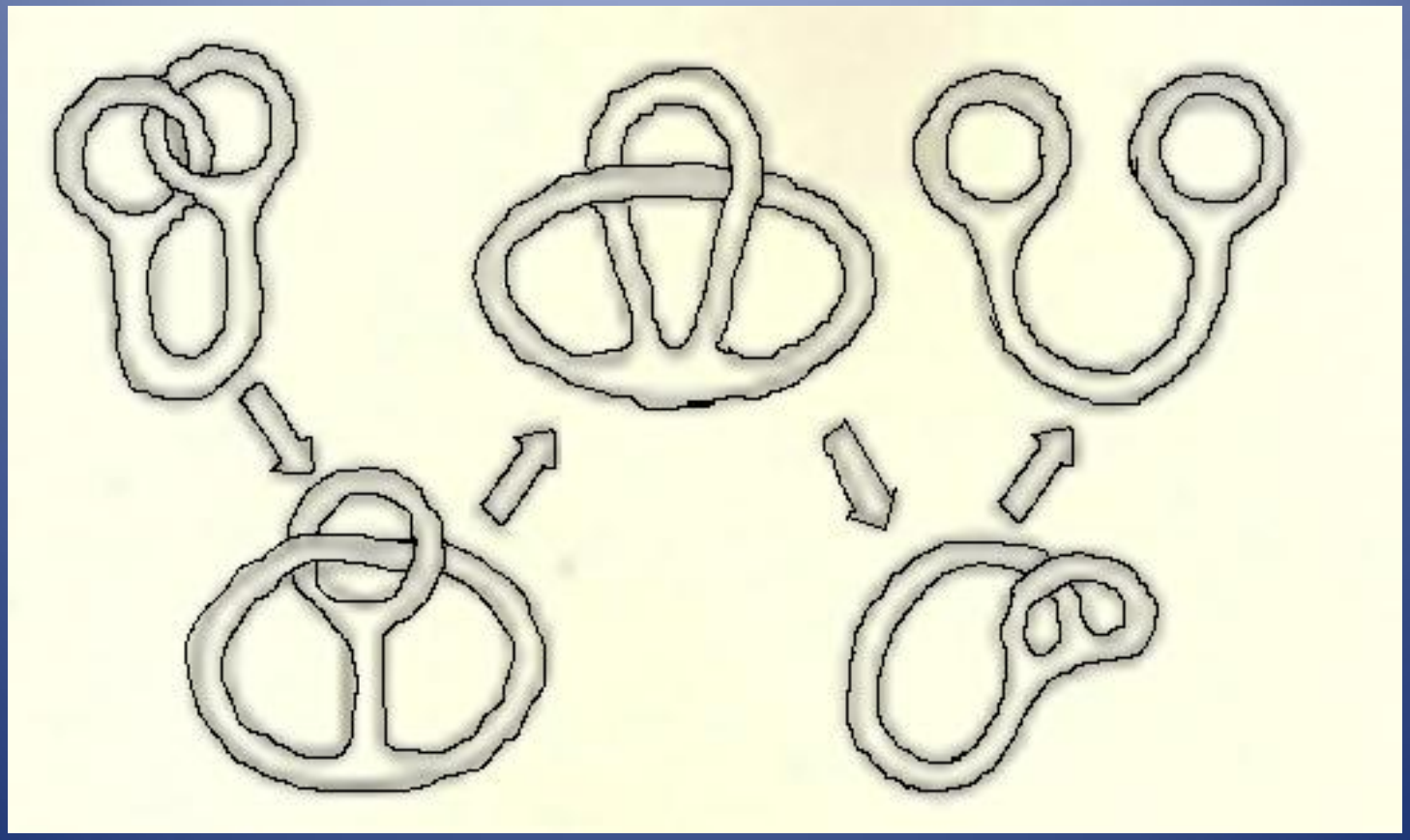
Qualquer H-objeto pode ser construído a partir de objetos geométricos de uma maneira puramente algébrica.

7. A conjectura de Hodge (1950)

Importância:

Uma prova para a conjectura estabeleceria uma ligação fundamental entre 3 disciplinas:

Geometria algébrica, análise e topologia.

Matemática: de padrões a conexões!!

“Desfazendo o laço”