Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação **junho/2012**

Seminários de Ensino de Matemática (SEMA-FEUSP)

Coordenador: Nílson José Machado

Responsável: Marisa Ortegoza da Cunha - marisa.ortegoza@gmail.com

Devlin e os problemas do milênio

Esta convicção na possibilidade de resolver todos os problemas matemáticos é um poderoso incentivo ao homem que trabalha. Escutamos, dentro de nós, o chamado perpétuo: existe um problema; busque sua solução. É possível encontrá-la através da razão pura, pois na matemática não há ignorabimus.

(David Hilbert, Paris, 1900)

Em 8 de agosto de 1900, David Hilbert apresentou, no Congresso Internacional de Matemáticos, realizado na Sorbonne, em Paris, os problemas que, considerava, ocupariam as mentes dos matemáticos durante o século que se seguiria. A lista constava de 23 problemas:

1.	Provar a hipótese do continuum, de Cantor
2.	Demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética
3.	Prova de que dois tetraedros têm volumes iguais, sob certas condições
4.	Construção de todos os espaços métricos em que as retas são geodésicas
5.	Provar que todo grupo contínuo é um grupo diferencial
6.	Transformar toda a Física em axiomas
7.	a^b é transcendente para a não nulo, diferente de 1, algébrico, e b irracional algébrico?
8.	**A hipótese de Riemann** e a conjectura de Goldbrach
9.	Achar a lei de reciprocidade mais geral em todo campo de número algébrico
10.	Encontrar um algoritmo que determine se uma equação diofantina tem solução
11.	Classificar as formas quadráticas a coeficiente nos anéis algébricos inteiros
12.	Estender o teorema de Kronecker-Weber para os corpos não abelianos
13.	Demonstrar a impossibilidade de resolver equações de grau 7 por meio de funções de 2 variáveis
14.	Provar o caráter finito de certos sistemas completos de funções
15.	Desenvolver bases sólidas para o cálculo enumerativo de Schubert
16.	Desenvolver uma topologia de curvas e superfícies algébricas
17.	Demonstrar que uma função racional positiva pode ser escrita sob a forma de soma de quadrados de funções racionais
18.	Construir um espaço euclidiano com poliedros congruentes. Qual a maneira mais densa de se empacotarem esferas?
19.	Provar que o cálculo de variações é sempre necessariamente analítico
20.	Todos os problemas variacionais com certas condições de contorno têm solução?
21.	Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um determinado grupo monodrômico
22.	Uniformizar as curvas analíticas por meio de funções automorfas
23.	Desenvolver um método geral de resolução no cálculo de variações

Em 24 de maio de 2000, o Instituto de Matemática Clay[1] apresentou, no Collège de France, em Paris, uma lista de 7 problemas matemáticos ainda em aberto, selecionados por especialistas, instituindo, para cada um, um prêmio de 1 milhão de dólares a quem resolvê-lo, ou seja, a quem apresentar uma resposta para ele ou provar que ela não existe.

Seguem os chamados "7 problemas do Milênio", e o ano de sua formulação:

1. Hipótese de Riemann (1859)
2. Teoria de Yang-Mills e a Hipótese da lacuna da massa (1950)
3. Problema P *versus* NP (1971)
4. Equações de Navier-Stokes (1830)
5. Conjectura de Poincaré (1904)
6. Conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer (1965)
7. Conjectura de Hodge (1950)

1. Hipótese de Riemann

Trata-se de um problema proposto em 1859, relacionado com a distribuição dos números primos. Aparentemente, os primos distribuem-se aleatoriamente na reta numérica. Nas palavras de Du Satoy (2007, p.13), *Em uma disciplina dedicada a encontrar padrões e ordem, os primos representam o desafio supremo.*

Por muito tempo, os matemáticos se perguntaram sobre a possível localização dos primos na reta real. Karl Freidrich Gauss (1777-1855) abordou o problema sob outro ponto de vista: "quantos primos existiriam, menores ou iguais a um dado número **n**" e denotou esse valor por $\pi(\mathbf{n})$. Por exemplo, $\pi(10) = 4$ (os primos são 2, 3, 5 e 7), $\pi(11) = 5$ e $\pi(100) = 25$.

Construiu, então, uma tabela como a que segue, na qual a terceira coluna apresenta a quantidade média de números que precisam ser contados até atingir um número primo e, na quarta coluna, a variação observada nesses valores médios (ampliação de tabela retirada de Du Satoy, 2007):

[1] Criado por Landon T. Clay, um rico investidor de Boston, apaixonado por Matemática.

n	$\pi(n)$	Quantidade, em média	Variação
10	4	2,5	
10^2	25	4,0	1,5
10^3	168	6,0	2,0
10^4	1 229	8,1	2,1
10^5	9 592	10,4	2,3
10^6	78 498	12,7	2,3
10^7	664 579	15,0	2,3
10^8	5 761 455	17,4	2,4
10^9	50 847 534	19,7	2,3
10^{10}	455 052 511	22,0	2,3

Gauss observou que quando multiplicava n por 10, tinha que adicionar 2,3 à razão entre os primos e todos os números. Essa relação entre multiplicação e adição levou-o a pensar nos logaritmos. Concluiu daí que os primos podem ser contados usando-se logaritmos na base **e**, no sentido de que, entre os números de 1 a **n**, aproximadamente 1 em cada log **n** será primo. Dessa forma, Gauss estimou que o número de primos entre 1 e **n** era de aproximadamente **n/log n**, e que o erro cometido diminuiria à medida que **n** crescesse. (Essa última expectativa configurou o chamado Teorema dos Números Primos, demonstrado, de forma independente, por Jacques Hadamard e por Charles de la Vallée Poussin, em 1896.)

Como a razão $\pi(n)/n$ fornece a densidade dos primos de 1 a n, Gauss considerou $d\pi(x)/dx \approx \ln x$, a taxa de variação de da função $\pi(x)$, e definiu a função

$Li(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$, como uma aproximação da quantidade de primos, de 1 a x.

Em 1740, o matemático suíço Leonhard Eüler (1707-1783) havia apresentado a função "zeta": $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$

Para valores de s maiores do que 1, essa soma é finita – por isso Eüler restringiu seu uso a casos em que s > 1. Por exemplo, $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Como a função zeta se relaciona com os números primos?

Eüler provou que, para todo real s>1, $\zeta(s) = \prod_{p\ primo} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{p}\right)^s}$.

O alemão Georg Bernhard Riemann (1826-1866) deu o passo chave para a utilização dessa função na investigação do padrão dos primos: substituiu o número real s por um complexo z. Riemann vislumbrou o elo entre a função zeta e os números primos pela estreita ligação entre a densidade $\pi(\mathbf{n})/\mathbf{n}$ e as soluções da equação $\zeta(z) = 0$.

Riemann descobriu que todo número real par negativo é zero da função zeta e **conjecturou** que todos os demais infinitos zeros se encontram sobre a reta Re(s) = ½, ou seja, todo zero – dito não trivial – seria do tipo ½ + bi, para b real. A reta assim descrita é chamada *linha crítica*.

Como os zeros da função zeta, de Riemann, se relacionam com a distribuição dos números primos?

Os zeros da função zeta "controlam" os erros gerados pela estimativa de Gauss **($\pi(n) \approx n/\log n$)**: cada zero com parte real ½ gera um erro de $\sqrt[2]{\mathbf{n}}$, que é a margem de erro esperada pela teoria da probabilidade para uma "moeda de primos" honesta. Como destaca Du Satoy, *uma moeda honesta produz um comportamento realmente aleatório, enquanto uma moeda viciada gera um padrão.* (2007, p.180). Assim, a existência de um zero fora da linha crítica de Riemann forçará a existência de algum padrão na sequência dos primos.

A hipótese de Riemann afirma que a "moeda dos números primos" não é viciada.

2. Teoria de Yang-Mills e a Hipótese da lacuna da massa

O segundo problema do Milênio pede o desenvolvimento de uma parte da matemática que, acreditam os cientistas, permitirá avançar na compreensão da matéria de que somos feitos – nós e tudo no universo.

A Física desenvolvida por Newton explica os movimentos em uma escala próxima do homem – ela é imprecisa quando tratamos do micro ou do macrocosmo. Desde o início do século XX, a teoria da relatividade descreve o universo em escala astronômica, enquanto que a mecânica quântica descreve o mundo em escala subatômica. Essas duas teorias se contradizem mutuamente – uma falha onde a outra funciona bem.

Ocorre que os grandes objetos de estudo da relatividade – planetas, galáxias, são todos constituídos das mínimas partículas estudadas pela mecânica quântica. Há que se desenvolver, então, uma teoria unificadora, abrangente, das quais tanto a teoria da relatividade quanto a mecânica quântica sejam aproximações. Esse modelo único deverá incorporar e dar conta de explicar as quatro forças fundamentais da natureza: a gravitacional, eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca.

A Teoria de Chen Ning Yang (1922) e Robert L. Mills (1927-1999) é um primeiro passo em direção a essa grande teoria unificadora e a Hipótese da Lacuna da Massa é um problema particular que surge nesse modelo, e cuja solução irá assegurar que a matemática está consistente com as simulações computacionais e observações realizadas em laboratório.

A nova teoria presume que a matéria é um tipo de campo. Um campo de força – ou simplesmente campo - é formado quando uma força atua em cada ponto de uma região do espaço. Esse modelo de campo não considera mais as partículas materiais ocupando o espaço, mas um campo quântico subjacente, meio contínuo fundamental, presente em toda parte do espaço.

A teoria de Yang-Mills representa um análogo quântico das equações de Maxwell, que descrevem um campo eletromagnético, sendo que as equações de Yang-Mills (as quais ninguém ainda conseguiu resolver!) permitem interpretações/aplicações clássicas (não quânticas) ou quânticas.

Um problema surgiu porém: se usada na forma clássica, a teoria descrevia ondas com massa nula que se propagavam à velocidade da luz, mas sabia-se que as forças nucleares eram conduzidas por partículas com massa não nula.

No dizer de um matemático do MIT, "a teoria tem que efetuar o truque de produzir partículas com massa a partir de blocos de construção sem massa." (Devlin, 2004, p. 129)

3. Problema N *versus NP*

Um algoritmo é um conjunto finito de regras a serem aplicadas para resolver uma determinada instância de um problema. Uma instância é determinada pelos valores de entrada do processo. A eficiência de um algoritmo é avaliada pela relação existente entre o tamanho da entrada e o tempo exigido para a computação da resposta. Usualmente, esse "tempo" é representado pela quantidade de operações lógico-aritmética realizadas pelo algoritmo. No caso de essa dependência do tempo em relação ao tamanho da entrada ser expressa por uma função polinomial, dizemos tratar-se de um "problema P".

No caso de o tempo exigido variar de forma exponencial com o tamanho da entrada, temos um algoritmo "não-eficiente". A tabela abaixo compara valores dados por uma função exponencial e algumas polinomiais, para diferentes valores da entrada x:

x	2^x	x	x^2	x^3	x^5
2	4	2	4	8	32
5	32	5	25	125	3125
10	1024	10	100	1000	10000
50	$1,13 \times 10^{15}$	50	$2,5 \times 10^3$	$1,25 \times 10^5$	$3,13 \times 10^8$
100	$1,27 \times 10^{30}$	10^2	10^4	10^3	10^{10}

O que seria, então, um problema NP?

Há problemas para os quais é muito simples verificar se uma candidata à solução é realmente correta, mas que podem apresentar grandes obstáculos para serem resolvidos. Por exemplo, como descobrir se o número 4 294 967 297 é primo ou composto? Não existe um algoritmo eficiente para isso. No entanto, caso nos informem de que se trata do produto de 6 700 417 por 641, em poucos minutos poderemos conferir a veracidade dessa afirmação.[2]

A classe de problemas NP (problemas não-determinísticos polinomiais) é aquela em que podemos verificar se uma possível solução é correta, em tempo polinomial.

No início dos anos 1960, Steve Cook demonstrou que se um problema pode ser resolvido num tempo polinomial, então ele pode ter uma possível solução verificada também em tempo polinomial. Ou seja, P é um subconjunto de NP.

A questão que constitui o problema do milênio é: **P = NP**?

O fato de ninguém ainda ter apresentado um algoritmo de complexidade polinomial para um problema considerado NP não implica que não exista um! E já ficou demonstrado que, caso exista tal algoritmo, para algum dos problemas NP, então todos os demais problemas NP também admitirão resolução em tempo polinomial. Ou seja, a igualdade estará provada.

O fator crucial nessa igualdade é que, caso seja comprovada, haverá um forte impacto nos sistemas de segurança de troca de informações eletrônicas, visto serem estes firmemente baseados na conjectura de que a fatoração de grandes números seja um problema NP.

O subconjunto dos problemas NP considerados de maior complexidade são chamado de "problemas NP-completos". O clássico problema do caixeiro-viajante é um exemplo.

[2] Pierre de Fermat conjecturava que esse número fosse primo. Em 1732, Leonard Eüler apresentou a fatoração mencionada.

4. Equações de Navier-Stokes

Essas equações foram formuladas, inicialmente, por Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836), em 1827 e por Siméon Denis Poisson (1781-1840), em 1831. Mais tarde, foram reformuladas por George Gabriel Stokes (1819-1903), em 1845.

São equações diferenciais (as variáveis são as funções vetoriais velocidade e pressão) que descrevem o escoamento de fluidos – gases e líquidos. Exceto para casos bem simples, nos quais vários termos das equações se anulam, ainda não foram encontradas soluções analíticas, ou seja, a representação explícita das funções incógnitas envolvidas.

Os problemas mais complexos que envolvem as equações de Navier-Stokes são abordados via análise numérica – um ramo da Matemática Computacional que lida especificamente com problemas que não admitem (ainda) uma solução analítica. É o caso, por exemplo, do problema da sustentação de um avião em vôo.

As equações de Navier-Stokes resultam da aplicação da segunda lei de Newton[3] a uma partícula do fluido, de massa infinitesimal (dm), que escoa com velocidade **v**. Em coordenada cartesianas, as equações de Navier-Stokes têm a forma:

na direção x:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

na direção y:

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$$

na direção z:

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Onde **v** representa a velocidade do fluido; P representa a pressão; **g** representa a aceleração da gravidade; ρ, a densidade do fluido e μ, a viscosidade.

5. Conjectura de Poincaré

[3] Essa lei afirma que a força resultante em uma partícula é igual à variação do momento linear **p**: **F** = d**p**/dt = d(m**v**)/dt. No caso em que a massa é constante, essa expressão toma a conhecida forma **F** = m. d**v**/dt = m**a**.

Esse problema foi inicialmente enunciado em 1900, pelo francês Henri Poincaré (1854-1912). Pouco depois, o próprio Poincaré concluiu que a formulação era falsa (apresentando ele mesmo um contra-exemplo) e, em 1904, propôs o problema como é hoje conhecido. Poincaré atuava em todos os ramos da matemática e é considerado o "último matemático universalista", além de criador da topologia algébrica.

Para compreender o problema, vamos ver/rever, de modo não formal, alguns conceitos matemáticos.

Uma variedade é uma generalização da ideia de superfície; é um espaço em que cada ponto é localizado por coordenadas e a quantidade de coordenadas necessárias para essa localização é a dimensão da variedade.

As variedades de dimensão 1 são as curvas; as de dimensão 2 são as superfícies; as de dimensão 3 ou maior do que 3 são chamadas variedades.

Uma variedade pode ser fechada ou aberta. Uma variedade é aberta quando 1 partícula pode se deslocar até o infinito. Exemplo disso é uma superfície cilíndrica de dimensão 2. Uma variedade é fechada quando qualquer caminho infinito tem que retornar ao ponto de partida, como ocorre num toro (variedade fechada de dimensão 2).

Uma variedade é simplesmente conexa quando "um elástico circular preso a ela pode deslizar sobre ela, sem perder o contato, até colapsar em um ponto".

Uma esfera é uma variedade de dimensão 2 fechada simplesmente conexa. Um toro é uma variedade de dimensão 2 fechada **não** simplesmente conexa.

Duas variedades de mesma dimensão são equivalentes quando existe uma função contínua e de inversa contínua, levando cada ponto de uma a um ponto da outra. Esse tipo de função é chamado um homeomorfismo.

A conjectura de Poincaré faz parte de um problema maior - o problema da classificação: fixada uma dimensão qualquer, é possível classificar, a menos de homeomorfismos, todas as variedades dessa dimensão?

Existe um resultado que afirma que toda variedade fechada pode ser construída – segundo procedimentos específicos – a partir de uma variedade fechada simplesmente conexa. Então o problema de classificação pode se ater apenas à identificação das variedades simplesmente conexas.

A Conjectura de Poincaré afirma o seguinte: "Toda variedade fechada simplesmente conexa de dimensão d é equivalente à esfera de dimensão d."

Vejamos o estado da arte, para os possíveis valores da dimensão d:

d = 1: o problema é trivial, pois só existem – a menos de equivalências – duas variedades: a reta e a circunferência (esfera 1-dimensional). Então toda variedade fechada 1-dimensional é equivalente à 1-esfera.

d = 2: existem apenas duas listas de variedades fechadas: as orientáveis (esfera, toro, bitoro, ...) e as não-orientáveis (garrafa de Klein, entre outras), de modo que qualquer superfície fechada é equivalente a uma superfície de uma dessas listas e quaisquer duas de uma mesma lista não são equivalentes.

d = 4: Em 1984, Michael Freedman (1951) resolveu o problema e ganhou a Medalha Fields em 1986.

d ≥ 5: Em 1960, Steven Smale (1930) resolveu o problema e ganhou a Medalha Fields em 1966.

d = 3 - **O problema do Milênio:**

A partir de 2002, o matemático Grigori Perelman (1966) começou a publicar artigos na Internet sobre a resolução do problema. Em 2006, o trabalho estava concluído e ele ganhou a Medalha Fields – que se recusou a receber. Em 18 de março de 2010, o Instituto de Matemática Clay anunciou que o matemático russo havia apresentado a solução da conjectura de Poincaré. Curiosamente, como Perelman se recusa a publicar o trabalho, é provável que Perelman não receba o prêmio, visto que isso é uma exigência para a premiação.

Para resolver o problema do Milênio, Perelman seguiu um roteiro iniciado pelo americano Richard Hamilton (1970). A resolução se baseia numa deformação aplicada a uma variedade de dimensão 3, fechada e simplesmente conexa, de modo a homogeneizar sua curvatura em todos os pontos, transformando-a na 3-esfera.

Para isso, Perelman adaptou uma função – já usada por Hamilton, para variedades de um tipo especial – de modo a manter a deformação sob controle.

6. Conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer

Uma curva elíptica é determinada por equações do tipo $y^2 = x^3 + ax + b$, com a e b inteiros, e discriminante $\Delta = -16(4a^3+27b^2)$ não nulo.

Dependendo da quantidade de raízes reais da expressão no lado direito, a curva elíptica terá uma (no caso de uma única raiz real) ou duas partes (se houver três raízes reais).

O problema proposto pelos matemáticos Brian John Birch (1931) e Henry Peter Francis Swinnerton-Dyer (1927) relaciona-se com a contagem de pontos de coordenadas racionais, sobre curvas elípticas. Para isso, adotaram a aritmética modular.

Consideraram diferentes números primos p e contaram os pares (x,y) de inteiros módulo p tai que $y^2 \equiv x^3 + ax + b(\text{mod } p)$. Para cada p considerado, a quantidade de pontos contados é finita, representada por N_p.

Como a divisão módulo um primo sempre gera um número inteiro como resposta, qualquer solução racional da equação original gera uma solução inteira da congruência correspondente. Se existirem infinitos pontos racionais sobre a curva elíptica, deverá haver várias soluções para cada congruência, e isso para vários primos. A recíproca dessa afirmação é a base da conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer.

A questão, então, é: como descobrir se existem muitas soluções para muitas dessas congruências?

Birch e Swinnerton-Dyer analisaram a convergência ou não do produto infinito das densidades p/N_p, para p primo. Ora, se a curva elíptica tivesse infinitos pontos racionais, então, para infinitos primos deveria haver muitas soluções N_p, e as razões p/N_p seriam muito menores do que 1, para infinitos valores de p. Isso levaria o produto infinito a zero.

Os dois matemáticos conjecturaram que esse argumento deveria funcionar no outro sentido: se o produto infinito das razões p/N_p desse zero, então a curva elíptica teria infinitos pontos racionais.

Birch e Swinnerton-Dyer usaram uma função de parâmetro complexo s, presente num trabalho anterior de Helmut Hasse e André Weil, e o fato já provado por Hasse de que os números N_p são, na maioria, iguais a p+1, com variação máxima de $2p^{1/2}$, para estabelecer que existem infinitos pontos racionais numa dada curva elíptica se e somente se a função mencionada se anula para s = 1.

7. Conjectura de Hodge

Essa conjectura foi anunciada em 1950, pelo matemático inglês Sir William Vallance Douglas Hodge (1903-1975), no Congresso Internacional de Matemáticos, em Cambridge, na Inglaterra. Ela possui, sem dúvida, o enunciado mais hermético, dentre os presentes nos problemas do Milênio:

"Toda forma harmônica diferencial (de um certo tipo) sobre uma variedade algébrica projetiva não-singular é uma combinação de classes de co-homologia de ciclos algébricos."

Vamos seguir os passos de Devlin para apreender (um pouco) o significado de cada termo presente nesse enunciado.

Graças a Descartes, podemos nos referir a certos objetos geométricos, como retas, circunferências etc, como conjuntos de pontos que satisfazem a certas equações. Podemos inverter o processo - partir de uma equação algébrica, ou de um sistema de equações algébricas, e analisar os pontos que satisfazem todas as equações do sistema: eles constituirão uma variedade algébrica.

Uma variedade algébrica projetiva não-singular é, de forma não muito precisa, uma superfície suave multidimensional que resulta da solução de uma equação algébrica.

O enunciado menciona "formas diferenciais harmônicas" – de modo informal, são soluções de uma certa equação diferencial parcial muito importante, chamada de equação de Laplace, que surge tanto na Física quando no estudo das funções complexas.

A conjectura de Hodge considera certos tipos de objetos abstratos – os H-objetos – que surgem ao se aplicar técnicas de cálculo em determinada superfície. Na terminologia da conjectura, um H-objeto é uma combinação racional de classes de co-homologias de ciclos algébricos. Devlin "traduz" a expressão para nós: qualquer H-objeto pode ser construído a partir de objetos geométricos de uma maneira puramente algébrica.

Referências Bibliográficas

Devlin, Keith. *Os problemas do milênio – sete grandes enigmas matemáticos do nosso tempo.* Rio de Janeiro: Record, 2004.

- **Hipótese de Riemann**

Du Sautoy, Marcus. *A música dos números primos – a história de um problema não resolvido na matemática.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda., 2007

Cipra, Barry. New Insights into Prime Numbers *in What´s happening in the Mathematical Sciences* . American Mathematical Society, vol. 6, 2006, pp.53-65.

- **P versus NP**

Iusem, Alfredo. P = Np ou as sutilezas da complexidade computacional, *in Matemática Universitária*, no. 5, junho de 1987, pp.33-60.

Malagutti, Pedro Luiz. *P x NP, in* www.dm.ufscar.br/hp/hp501/hp501001/hp501001.html

- **Conjectura de Poincaré**

Cipra, Barry. First of Seven Millenium Problem Nears Completion *in What´s happening in the Mathematical Sciences* . American Mathematical Society, vol. 6, 2006, pp.2-13.

Viana, Marcelo. Vídeo com aula sobre a Conjectura de Poincaré, ministrada pelo professor do IMPA, no IFUSP, disponível em www.matematicaparaleigos.blogspot.com.br/2012/01/conjectura-de-poincare.html.

- **Equações de Navier-Stokes**

Cipra, Barry. Vortices in the Navier-Stokes Equations *in What´s happening in the Mathematical Sciences* . American Mathematical Society, vol. 6, 2006, pp.78-85.

Medeiros, Luis Adauto. *Sobre o Modelo Matemático Navier-Stokes* in www.im.ufrj.br/~medeiros/LinkedDocuments/ModeloMatematico.pdf