Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação novembro/2009
Seminários de Ensino de Matemática (SEMA-FEUSP)
Coordenador: Nilson José Machado

Padrões e regularidades nas aulas de matemática

Alice Mieko
alicemieko@uol.com.br

Marília Centurión
mrcenturion@ig.com.br

"Como as ciências matemáticas são tão vastas e variadas, é necessário localizar seu cultivo, pois toda atividade humana está ligada a lugares e pessoas".

David Hilbert (1862-1943)

"Devo mencionar que a matemática é acumulativa; ou seja, nunca perde território, e suas fronteiras estão sempre se expandindo. Isto é em parte uma conseqüência de seus padrões absolutos; eles asseguram que tudo aquilo que uma vez foi boa matemática sempre será bom e permanecerá como parte do corpo vivo do conhecimento matemático".

(ASGER, A. , p. 5)

"Lecionar é um ato de ensinar, mas também é um ato de aprender".

Chico Nery (Revista do Professor de Matemática nº 70)

- **Introdução: padrões e regularidades na natureza**

Outro dia, ao olhar pela janela, deparei-me com o Ipê Amarelo (*Tabebuia alba)* do jardim, todo florido...
Todos os anos ao final do inverno, o ipê floresce. Diz-se que quanto mais frio for o inverno, maior será a intensidade das flores nos galhos vazios de folhas.
Nesta espécie, a queda das folhas coincide com o período de floração, o que torna este espetáculo da natureza ainda mais belo!
No entanto a florada dura poucos dias...Depois de um tempo as flores, como um tapete amarelo, cobrem o chão. No ciclo da natureza, as flores, polinizadas pelos sabiás cantantes cedem lugar aos frutos e sementes.

A natureza oferece muitos padrões e regularidades como a florada do ipê amarelo: o tempo das chuvas, da falta das mesmas, tempo das flores que leva aos dos frutos, tempo de semear, de colher...
Na história da humanidade, a observação dos padrões da natureza serviu como modelo matemático para diversas situações.

- **Padrões numéricos e seqüências**

A determinação da lei de formação em sequências formadas com as peças dos blocos lógicos já é trabalhada com crianças da Educação Infantil.
Algumas atividades propõem uma determinada sequência com as peças que compõem o material, como por exemplo:

> Triângulo azul, quadrado vermelho, círculo amarelo, triângulo azul, quadrado vermelho...

É dito aos alunos que essa composição forma os "vagões de um trem". Em seguida, pergunta-se se eles percebem qual é o "segredo" desse trem e então, que continuem a descrever os vagões. A subjetividade das crianças, livre e criadora, tanto pode continuar com a sequência sugerida, como estabelecer uma nova sequência, construindo vagões de um novo trem. De qualquer maneira, é sempre interessante que a criança seja estimulada a comentar sua criação, e que um debate entre as crianças de uma mesma sala mostre a todos as diversas estratégias na construção dos vagões dos trens.
No decorrer dos anos de escolaridade, ainda no Ensino fundamental I, a observação de padrões de regularidade e a determinação da lei de formação de sequências são ainda trabalhadas com os alunos. Na maioria das vezes as sequências são séries numéricas, como, por exemplo, as tabelas de multiplicação (tabuadas), ou ainda as séries formadas pelos divisores de um número.

- **Par ou ímpar?**

Números e operações constituem um dos temas da matemática que assumem, desde o início da escolaridade grande importância. Um dos primeiros padrões numéricos que uma criança aprende é o de reconhecer se um determinado número natural é par ou ímpar. Assim, já nas primeiras séries do Ensino Fundamental as crianças reconhecem, entre os números naturais:

> *Números ímpares: 1 3 5 7 9 11...*
> *Números pares: 0 2 4 6 8 10...*

Por outro lado, esse reconhecimento de números pares e ímpares também pode constituir um contexto interessante para a formulação de conjecturas acerca de muitas propriedades dos números pares e ímpares. Tais conjecturas podem ser estabelecidas pelos alunos por meio da verificação das regularidades e da observação de padrões, a partir de questionamentos feitos pelo professor, tais como:

- A soma de dois números pares é par ou ímpar? E a soma de dois números ímpares?
- O quadrado de um número par é par ou ímpar? E o quadrado de um número ímpar?
- O produto de um número par por um número ímpar é par ou ímpar? E o de dois números pares? E o de dois números ímpares?
- É possível haver três números naturais tais que a soma seja par e o produto seja ímpar? Por quê?

Alunos das primeiras séries do Ensino Fundamental observam estas propriedades fazendo uso de algumas verificações numéricas. No entanto, a partir do conhecimento da álgebra, onde o uso de letras para generalizações já desperta o interesse pelas fórmulas, não é surpreendente

– e consideramos necessário – que os alunos sejam estimulados a estabelecer leis de formação dos padrões e das propriedades antes verificadas apenas experimentalmente. Tais generalizações quando realizadas pelo próprio aluno torna-o participativo no processo criativo, na busca da construção de significados, o que está muito distante da rotina das fórmulas apresentadas prontas.

Segundo José Antonio Marina, *ou somos buscadores ou somos máquina... Um processo inteligente começa por um "estado inicial", a partir do qual se procura chegar a um "estado final" ou "meta". O exame das possíveis soluções para atravessar esse vazio designa-se por "busca", e o conjunto dos possíveis caminhos a explorar é o "espaço de busca".* (MARINA, p.197)

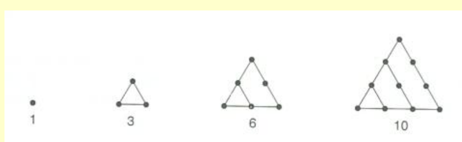
- **Em busca de padrões**

Os gregos da Antiguidade gostavam de atribuir qualidades aos números.

Números figurados já eram estudados pelos membros da escola pitagórica. Também se atribuem aos pitagóricos os números *perfeitos, deficientes* e *abundantes* que apresentam ligações místicas. Um número se diz *perfeito*[1] se é igual à soma de seus divisores próprios; *deficiente*, se excede esta soma e *abundante* se é menor que esta soma.

A chamada geometria grega dedicava-se em especial ao estudo dos números figurados. Os números figurados constituem uma série, ou seja, são dispostos em uma ordem definida e relacionados com seus vizinhos segundo uma regra[2].

Números triangulares



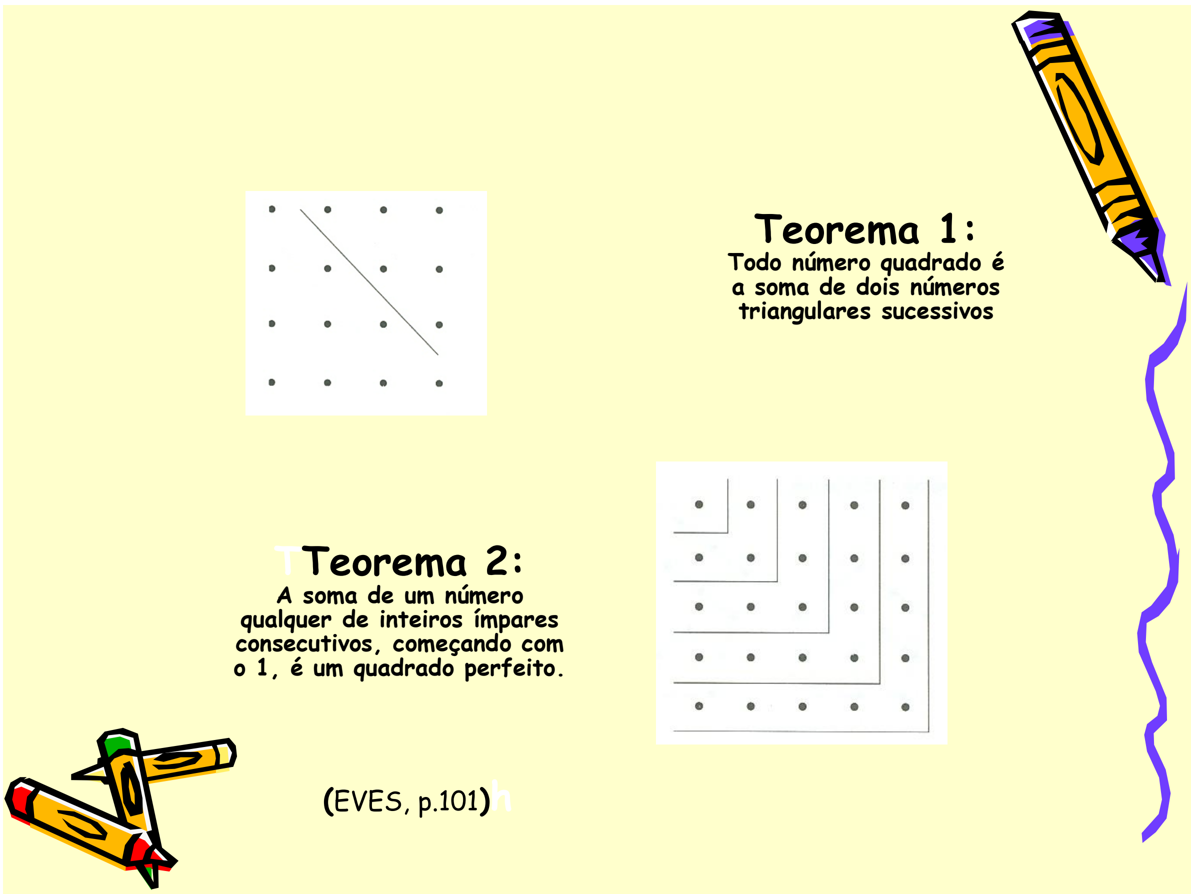
$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

[1] Deus criou o mundo em seis dias, um número perfeito, pois 6=1+2+3 (EVES, p.99)

[2] As séries em que os números sucessivos diferem de uma mesma quantidade são chamadas séries aritméticas, ou progressões aritméticas, como por ex. a série dos números pares ou a dos ímpares.

Ao se apresentar números figurados para que os alunos observem o padrão e busquem uma regularidade, pode-se perguntar inicialmente qual é o próximo número da sequência.
No entanto, se o objetivo é o da busca de uma generalização para o enésimo termo, é necessário que a pergunta seja outra, tal como: "qual é o décimo termo desta sequência?". Isto certamente levará nosso aluno a buscar a lei de formação da sequência dada.

Muitos teoremas relativos a números figurados podem ser estabelecidos de maneira puramente geométrica:



Claro está que esses teoremas podem ser provados algebricamente, uma vez obtidas as representações algébricas genéricas dos números triangulares e quadrados[3].

[3] Estas demonstrações encontram-se em EVES, p. 102.

- A série de Fibonacci

FIBONACCI (1170-1250)

Em sua obra *Liber Abaci* (1202), Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa apresentou o famoso problema da criação de coelhos:

Sabendo-se que a natureza dos coelhos é tal que se tornam produtivos após dois meses e que depois, mês a mês é produzido um novo casal, pergunta-se: começando com um casal recém nascido, quantos casais de coelhos existirão ao final de um ano?

Esta é a série gerada pela solução do problema de coelhos:

indice *n*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...	...

A fórmula geral para o enésimo termo desta série é:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

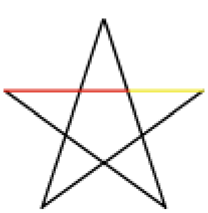
É possível ainda notar uma regularidade nas razões obtidas com os números da série:

$$\frac{F_2}{F_1}\ ;\ \frac{F_3}{F_2}\ ;\ \frac{F_4}{F_3}\ ;\ \ldots\ ;\ \frac{F_{10}}{F_9}\ ;\ \ldots\ \frac{F_{n+1}}{F_n}\ ,$$

No século XVIII, o matemático Robert Simson determinou que a sequência destas razões converge para o número áureo: 1,618033989

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

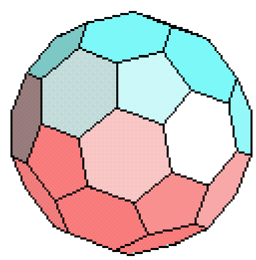
Diz-se que um ponto divide um segmento de reta em *secção áurea* (ou média e extrema razão) se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo. Pitágoras fundou uma sociedade secreta, conhecida como Escola Pitagórica que tinha como símbolo o *pentagrama estrelado,* formado pelas 5 diagonais de um pentágono regular. Cada um dos 5 lados do pentagrama estrelado divide em secção áurea cada um dos dois lados do pentagrama que ele intercepta:



O mais longo dos segmentos no pentagrama (vermelho) é media geométrica entre o menor (amarelo) e o segmento todo.

- **Dos mosaicos à bola de futebol**

O estudo dos padrões na geometria oferece uma boa oportunidade ao professor para fazer uma "ponte" entre a geometria plana e a espacial: um dos padrões investigados pelos alunos do Ensino Fundamental é o do ladrilhamento do plano com polígonos regulares.
Uma vez que o giro completo é de 360°, isto só é possível com quatro quadrados, ou seis triângulos eqüiláteros ou ainda com três hexágonos. No entanto, se o aluno conhecer uma bola de futebol, irá notar que a superfície que a recobre é composta por pentágonos rodeados por hexágonos.
Na copa mundial de 1970 o mundo do futebol começou a utilizar uma bola confeccionada com pentágonos e hexágonos. Esta estrutura poliédrica chama-se *icosaedro truncado*, e é constituída de 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais.



Bola de Futebol: icosaedro truncado

Como se pode notar há, para o aluno, uma mudança de paradigma: do ladrilhamento no plano passamos ao espaço (como, por exemplo, a bola de futebol), ou seja, já não vale mais o ângulo de 360°, para "fechar" a volta.

- **Números primos: em busca de um padrão**

No quarto século a. C. os gregos já sabiam que os números primos servem como "blocos de construção" para todos os números.

> *Eles perceberam que todo número podia ser gerado pela multiplicação de números primos. Embora os gregos acreditassem erroneamente que fogo, ar, terra e água fossem os elementos constitutivos da matéria, foram precisos ao identificar os átomos da aritmética. Por muitos séculos, os químicos lutaram para identificar os constituintes básicos de sua disciplina, e a intenção dos gregos culminou finalmente na tabela periódica de Dmitri Mendeleiev, uma descrição completa dos elementos da química. Apesar do rápido sucesso dos gregos na identificação dos blocos de construção da aritmética, os matemáticos ainda têm dificuldades para entender a tabela dos números primos.*
>
> (SAUTOY, p.31)

Não existe um padrão para a sequência dos números primos. Muito embora saibamos que a sequência dos números primos é infinita, ou nas palavras de Euclides:

Há mais números primos que qualquer quantidade designada de números primos.[4]

Será necessário ampliar a base do edifício matemático para descobrirmos uma matemática na qual poderemos resolver este problema: encontrar um padrão na sequência dos números primos.

- **Considerações finais**

> *"Deve-se notar que nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga. Em vez de um argumento encontra-se meramente a descrição de um processo. Instrui-se:" Faça assim e assim ". Além disso, exceto possivelmente em alguns casos, essas instruções não eram dadas na forma de regras gerais, mas simplesmente aplicadas a sequências de casos específicos. Assim, se é para explicar a resolução de uma equação quadrática, não se encontram nem a dedução do processo usado nem a descrição geral do processo, mas ao invés disso nos são oferecidas várias equações específicas e somos informados, passo a passo, como proceder para resolver cada um dos exemplos. Por mais insatisfatório que o processo "faça assim e assim" possa nos parecer, não deveria causar estranheza, pois é em grande medida o procedimento que nós mesmos usamos no ensino de partes da matemática elementar np primeiro e segundo graus"*
>
> (EVES, p.58)

A matemática que é ensinada na escola tem como um dos objetivos desenvolver a atividade intelectual do educando. No entanto, muitas vezes o que se observa é que são apresentadas regras prontas, não exigindo do aluno quase nenhuma atividade intelectual, a não ser uma grande capacidade de memorização para armazenar regras, algoritmos, definições. Um procedimento que certamente desperta o interesse dos alunos é torna-los participativos do processo da aquisição de seu conhecimento.

Para um grande número de alunos, a descoberta de regularidades bem como a generalização de padrões numéricos e/ou geométricos constituem o lado mais atraente do aprendizado de matemática, o despertar para a criação, o estímulo que os convida a pensar.

Muitas são as propostas que levam em conta a participação dos alunos na observação de padrões e regularidades, na formulação de conjecturas acerca da lei de formação destas sequências bem como sua generalização.

Tais propostas estão contempladas nas tendências atuais da Educação Matemática, onde convivem diferentes linhas de pensamento, cada qual abordando algumas dimensões da atividade matemática. Dessa maneira, tendo em vista a diversidade do fenômeno educativo, não podemos esperar que haja uma convergência absoluta no tratamento das questões próprias do ensino da matemática. Como acontece na área da Educação, na Educação Matemática também somos levados a conviver com as diferentes escolhas teóricas e metodológicas.

No entanto, gostaríamos de ressaltar que o lado mais proveitoso desse recurso é o de poder reproduzir para o aluno situações análogas às que originaram a construção de diversos

[4] A demonstração de Euclides da infinitude de números primos encontra-se em AABOE, p.66.

conteúdos matemáticos, e aprender pelo viés da História da Matemática, como se deu a evolução das idéias matemáticas por meio da resolução dos problemas enfrentados pela humanidade ao longo dos tempos, onde a intuição e a lógica desempenharam papel muito importante.

- **Bibliografia**

AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática.* Rio de Janeiro: SBM, 1984. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar)

BARBOSA, R.M. *Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos.* São Paulo: Atual, 1993.

BOYER, C.B. *História da matemática.* São Paulo: Edgard Blücher /Edusp, 1974.

BUSHAW,D.et al.*Aplicações da matemática escolar.*Tradução: Hygino H. Domingues São Paulo: Atual, 1997.

CARVALHO, M.C.C.S. *Padrões Numéricos e seqüências.* São Paulo: Moderna, 1997.

DU SAUTY, M. *A música dos números primos: a história de um problema não resolvido na matemática.* Tradução: Diego Alfaro - Rio de Janeiro: Zahar Ed., 2007.

EVES, H. *Introdução à História da matemática.* Tradução: Hygino Domingues – Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

HOGBEN, L. *Mathematics for the million* New York, Norton, 1937. (Tradução brasileira sob o título *Maravilhas da Matemática.* Porto Alegre: Globo, 1958.)

IMENES, L.M. & LELLIS, M. *Geometria dos mosaicos.* São Paulo: Scipione, 2002.- (Coleção Vivendo a Matemática)

MACHADO, N.J. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão.* São Paulo: Scipione, 2000.- (Coleção Vivendo a Matemática)

MARINA, J. A. *Teoria da inteligência criadora.* Tradução: Fernando Moutinho- Lisboa: Caminho da Ciência, 1995.