Criatividade
e
história da matemática

Antonio Carlos Brolezzi

IME/USP

http://www.ime.usp.br/~brolezzi

brolezzi@ime.usp.br

Objetivo

Mostrar alguns episódios da história da matemática em que certos processos criativos podem ser vislumbrados.

O que é criatividade?

Criatividade é um processo que torna alguém sensível aos problemas ou lacunas nos conhecimentos e o leva a identificar dificuldades, procurar soluções, formular hipóteses, testá-las uma e outra vez, modificando-as se necessário e a comunicar os resultados.

Alguns processos criativos:

- construir metáforas;
- provocar transformações;
- formar associações;
- reconhecer similaridades;
- reconhecer a natureza do problema;
- representá-lo internamente;
- decidir qual das soluções é mais promissora;
- escolher e organizar processos criativos;
- combinar estratégias de pensamento para desenvolver novas linhas de ataque ao problema.

Heurísticas propostas por Polya para se resolver um problema:

1. **Procurar um exemplo**
2. **Desenhar uma figura**
3. **Formular um problema equivalente**
4. **Modificar o problema**
5. **Escolher a notação adequada**
6. **Explorar simetrias**
7. **Dividir em casos**
8. **Trabalhar de trás para frente**
9. **Raciocinar por contradição**
10. **Explorar paridades**
11. **Considerar casos extremos**
12. **Generalizar**

Heurística significa “a *arte da descoberta”*. Consiste em estratégias ou táticas de resolução de problemas. É a arte de inventar, de fazer descobertas. É possível também dizer *uma heurística*, ou *as heurísticas*, referindo-se às técnicas ou métodos, mesmo informais, que podem servir para se obter a solução de um problema.

A palavra vem do grego *εὑρηκα* (*eureka*) que significa “Eu descobri”!, a famosa frase de Arquimedes quando ele resolveu o problema da coroa do rei Hierão II de Siracusa.

Pensamos que podemos resumir as heurísticas a tentativas de encontrar caminhos eventualmente novos, ligando significados novos ou conhecidos.

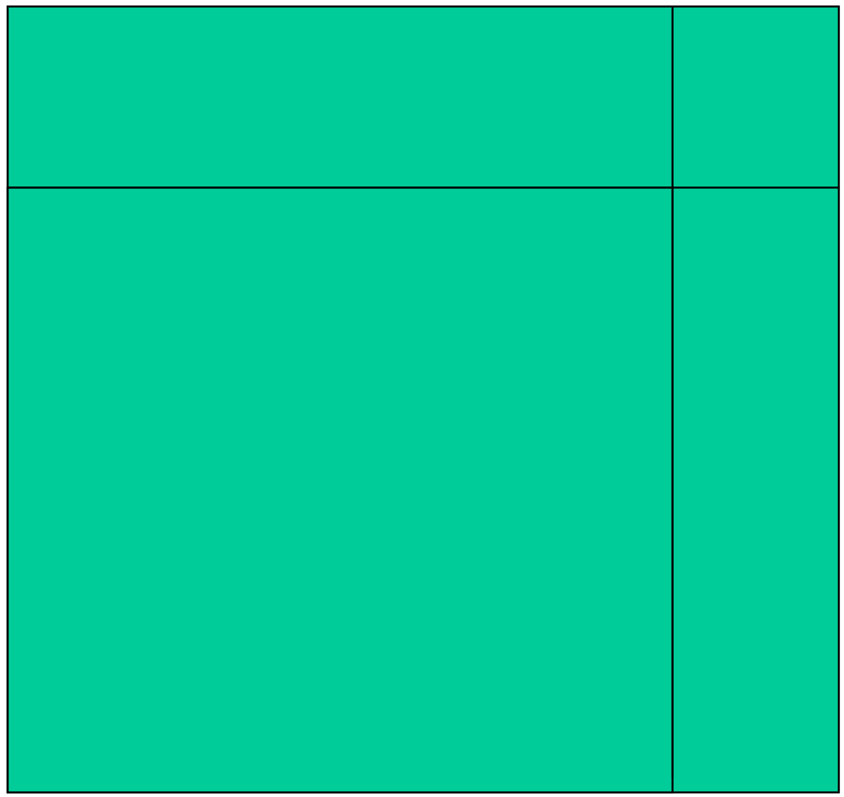
Pelo fato de lidar necessariamente com o novo, pelo menos em termos de caminhos novos, é que pensamos estar tão ligado o tema dos problemas ao tema da criatividade. E as heurísticas estão interligadas, por sua vez, às operações fundamentais do pensamento criativo.

Exemplo 1. Fórmula de Bháskara

$$ax^2 + bx + c = 0$$

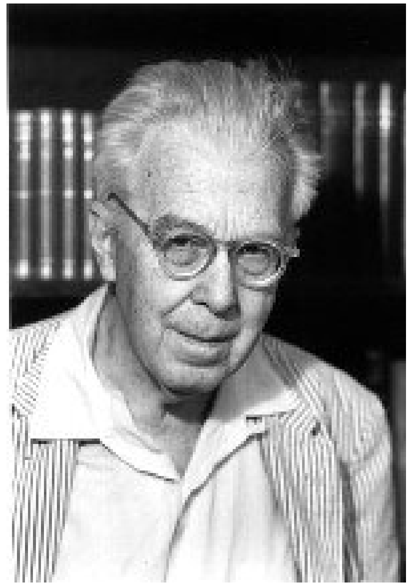
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

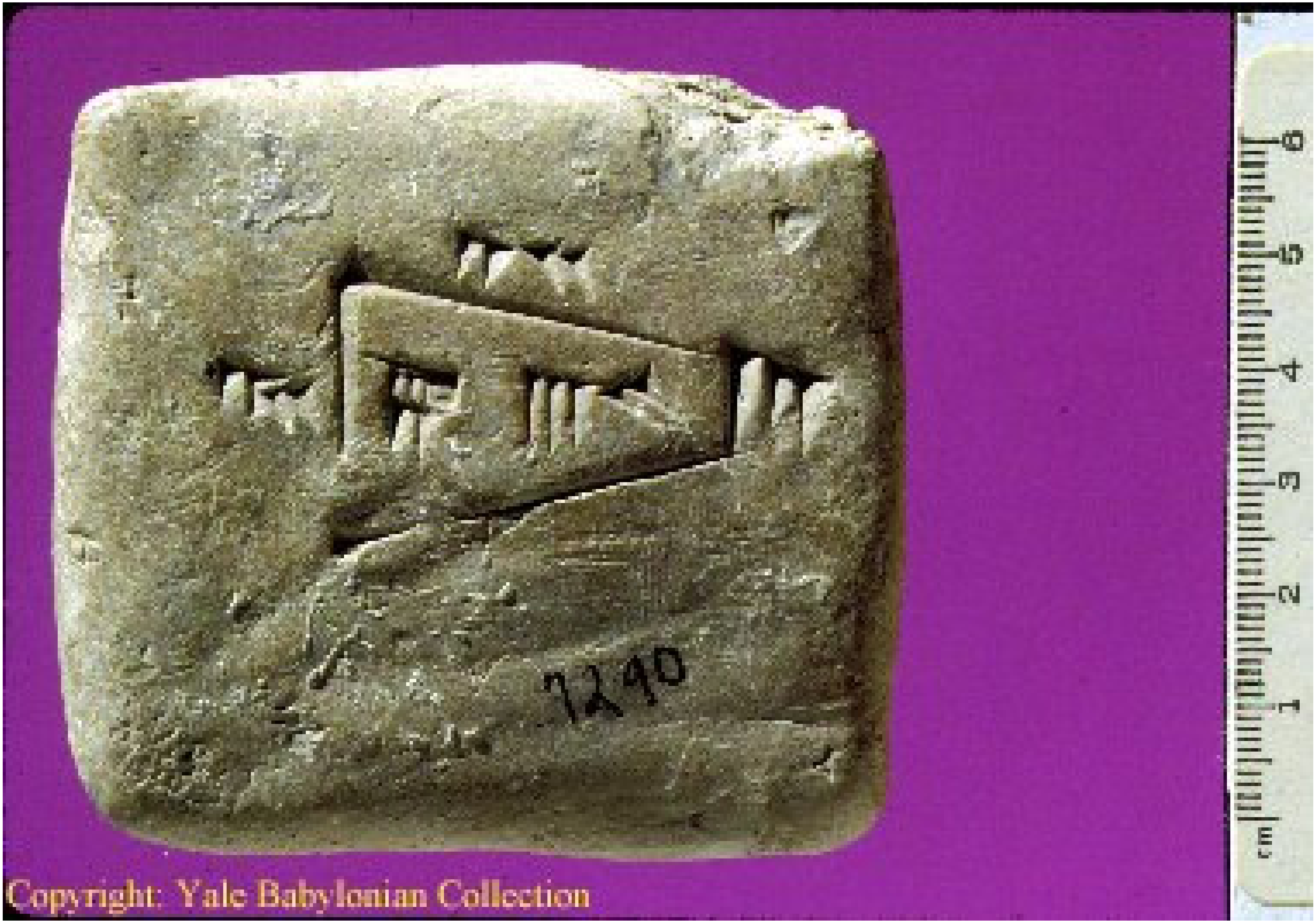
O quadrado da soma: uma relação conhecida a muitos milênios

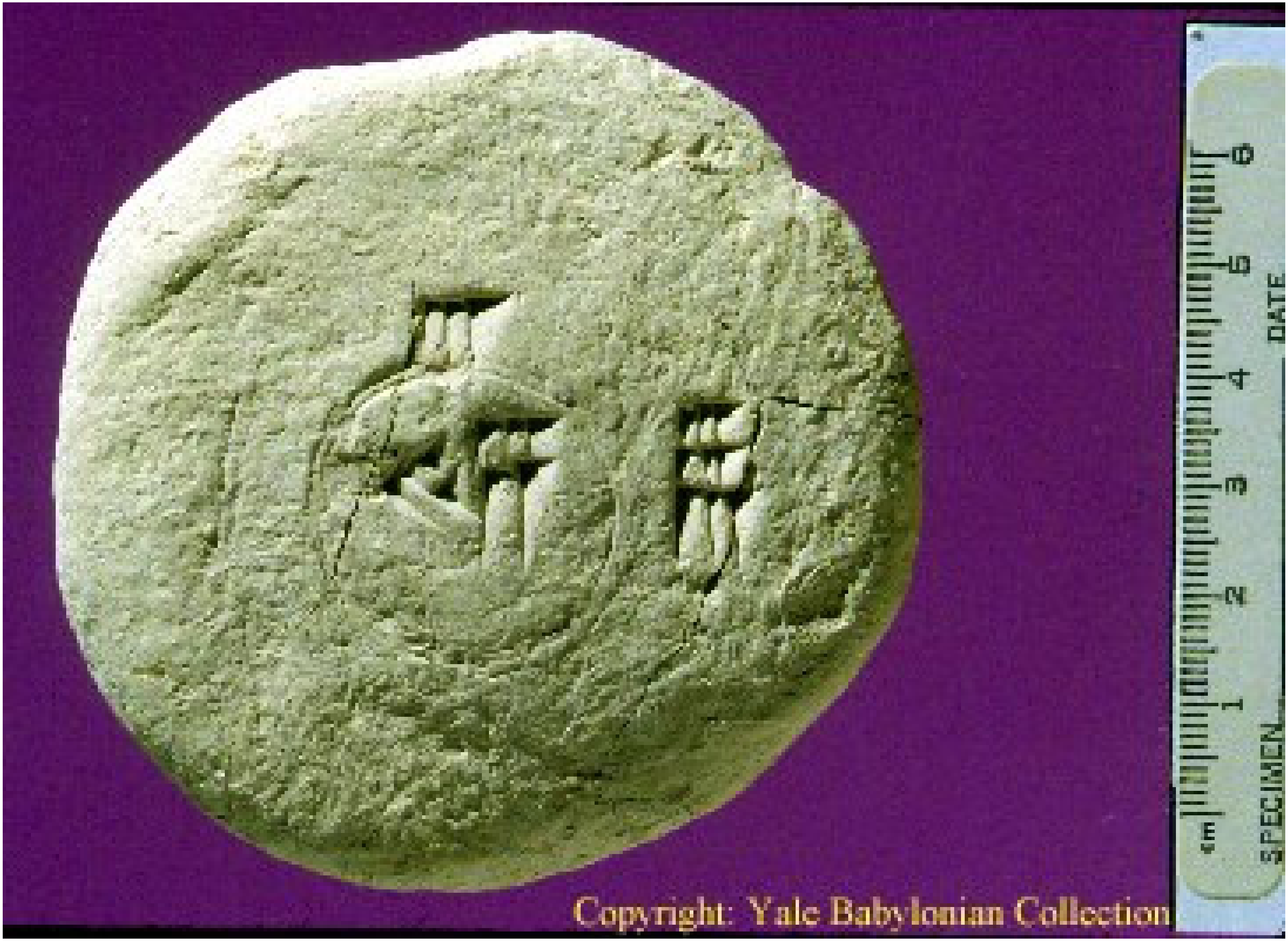


$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

Somente em 1934 Otto Neugebauer decifrou, interpretou e publicou as tabletas matemáticas babilônias.

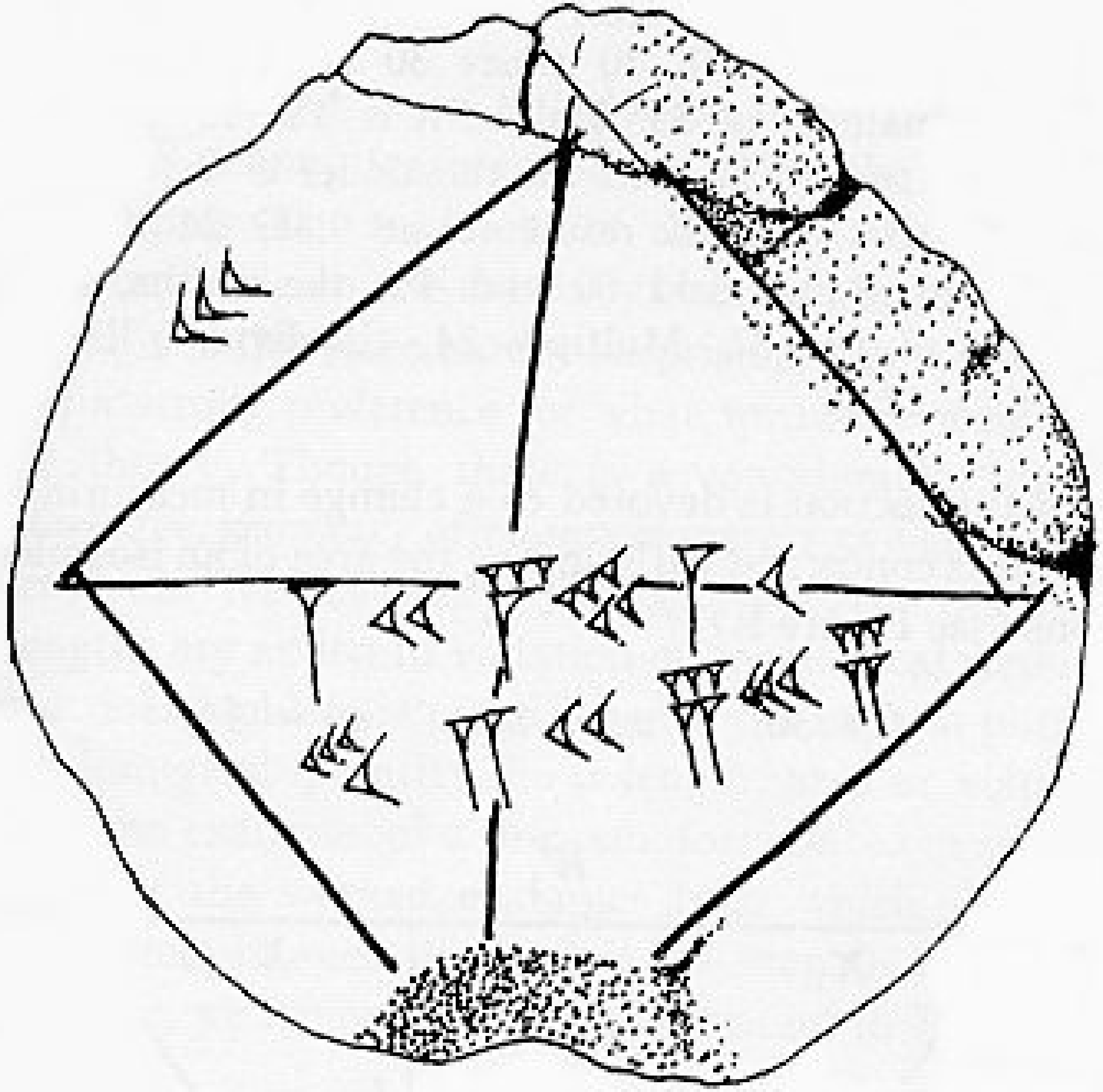



7290
Copyright: Yale Babylonian Collection



Copyright: Yale Babylonian Collection
cm
SPECIMEN
DATE

O teorema de Pitágoras seria de conhecimento dos antigos babilônios.



Número no lado do quadrado: 30

Números ao longo da diagonal:

1,24,51,10 e 42,25,35.

$$0;30=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$$

$$1;24,51,10=1\times 60^{0}+24\times 60^{-1}+51\times 60^{-2}+10\times 60^{-3}=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{3600}+\frac{10}{216000}$$

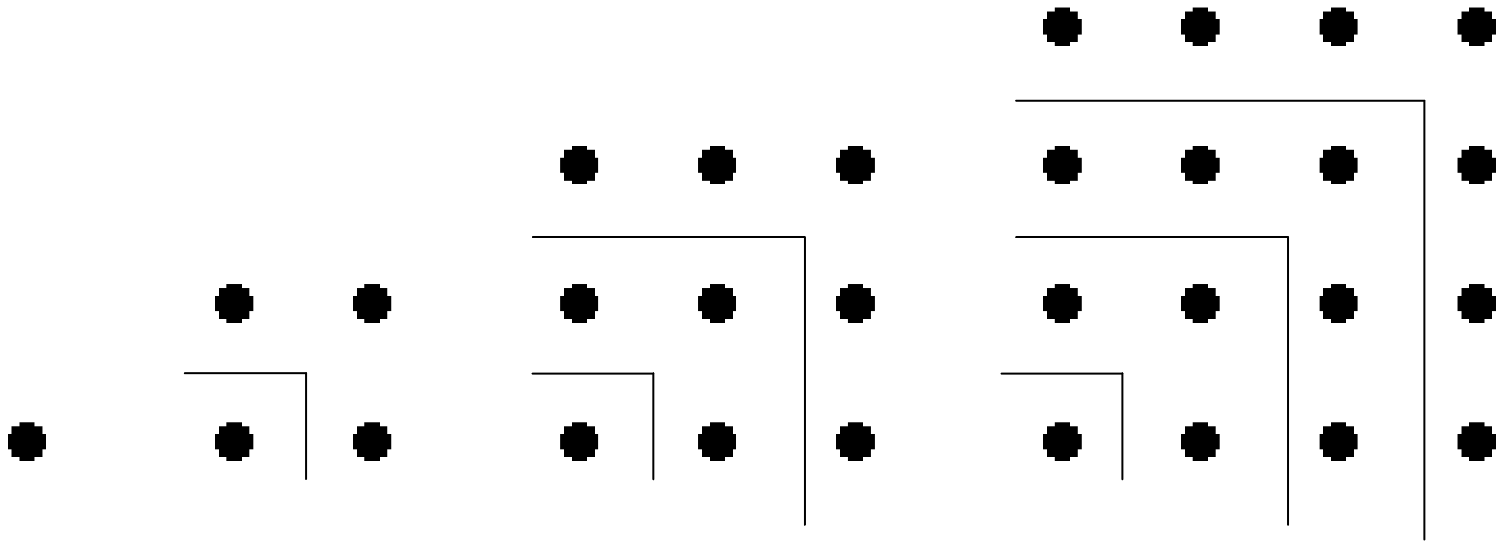
$$\cong 1,414212963$$

$$\sqrt{2}\cong 1,414213562$$

$$0;42,25,35\ =42\times 60^{-1}+25\times 60^{-2}+35\times 60^{-3}=\frac{42}{60}+\frac{25}{3600}+\frac{35}{216000}$$

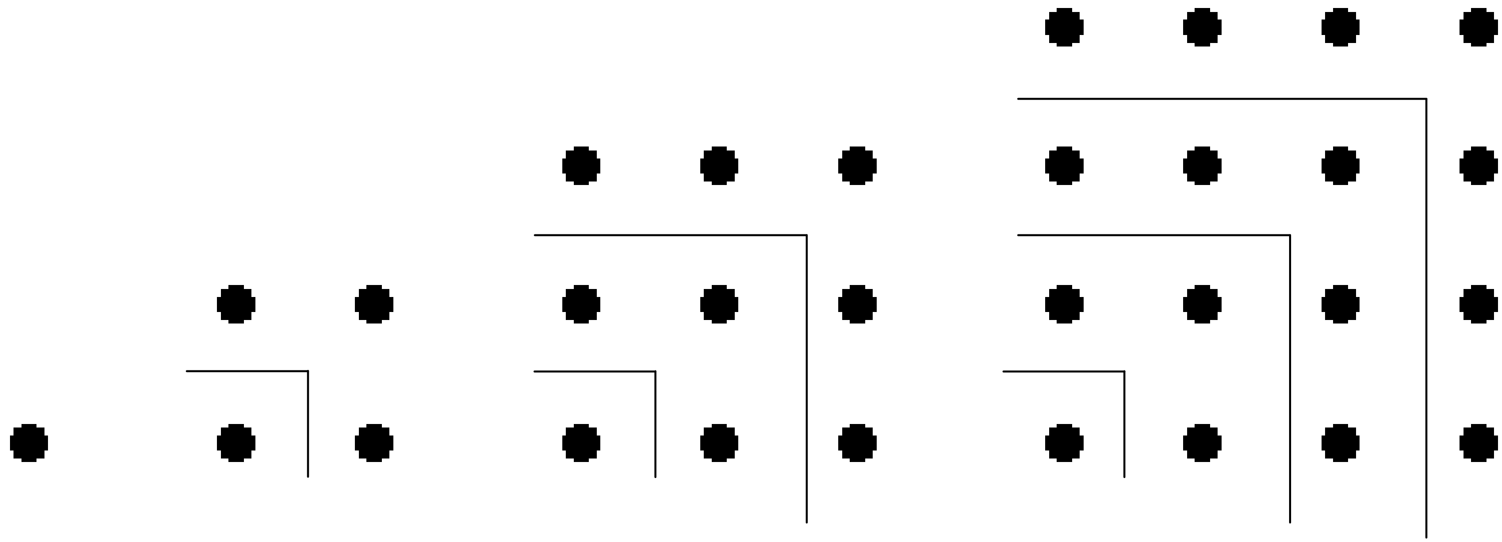
$$\cong 0,707106481$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0,707106781$$



1 4 9 16

1 1+3 1+3+5 1+3+5+7



1 | 4 | 9 | 16

1 | 1+3 | 1+3+5 | 1+3+5+7

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$,

então $n = (m^2 - 1)/2$

e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$

$$n^2 + (2n + 1) = (n+1)^2$$

Se $2n + 1 = m^2$, então $n = (m^2 - 1)/2$ e $n + 1 = (m^2 + 1)/2$,

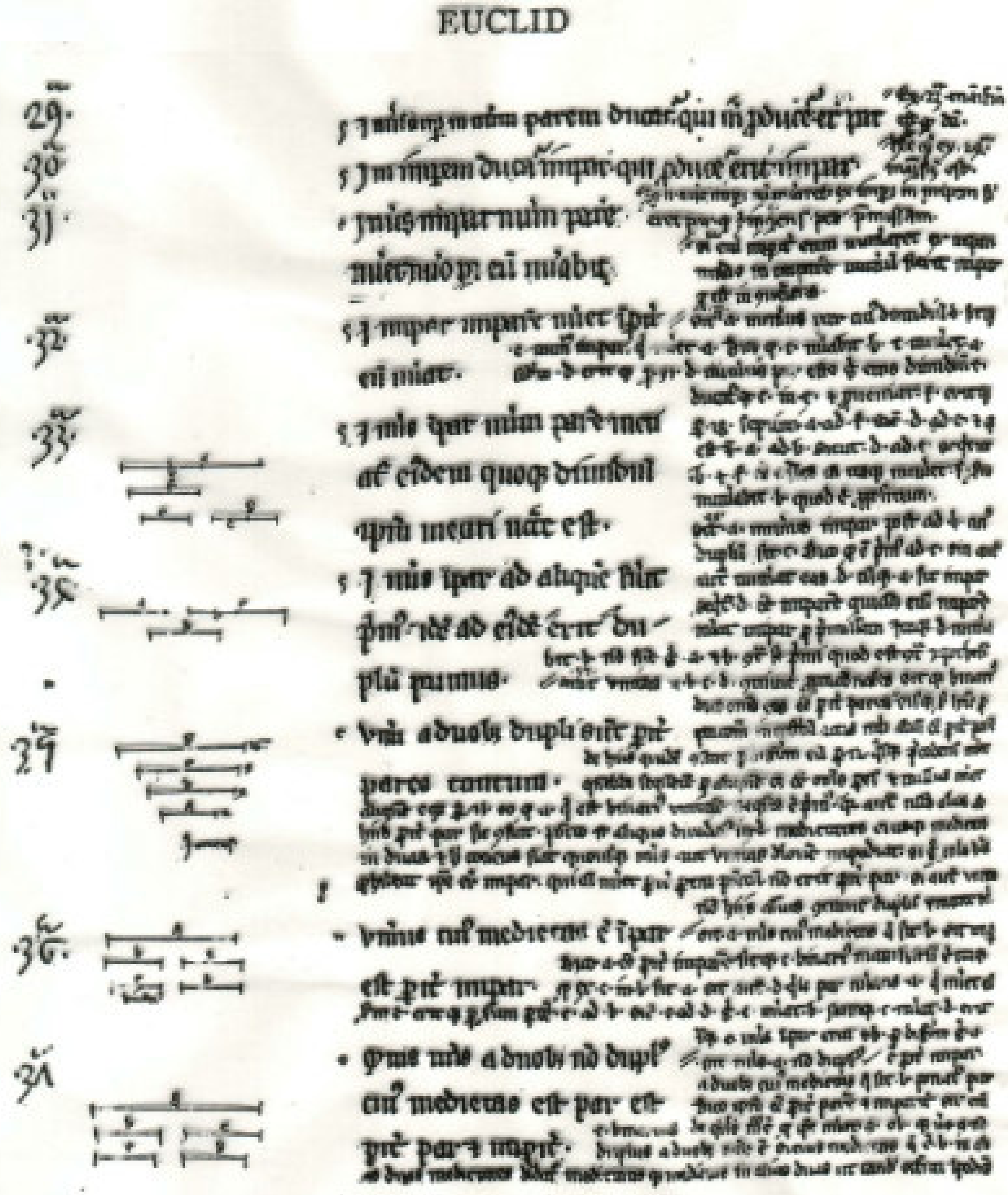
isto é, a fórmula acima se escreve como

$$(m^2 - 1)^2/4 + m^2 = (m^2 + 1)^2/4$$

m	$(m^2 - 1)/2$	$(m^2 + 1)/2$
3	4	5

Há milênios os babilônios possuíam métodos de completar quadrados e assim resolviam problemas que em nossa linguagem resultariam em equações quadráticas.

Euclides (300 aC) desenvolveu métodos geométricos de completar quadrados, mas não lidava com equações, e sim com grandezas geométricas.

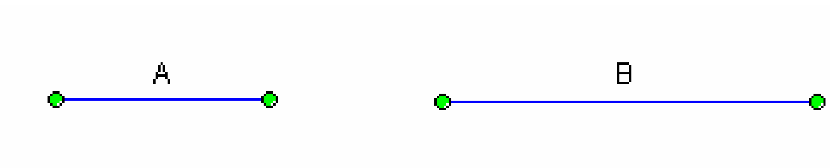


PAGE FROM A TRANSLATION OF EUCLID'S ELEMENTS

This manuscript was written *c.* 1294. The page relates to the propositions on the theory of numbers as given in Book IX of the *Elements*. The first line gives Proposition 28 as usually numbered in modern editions

Álgebra Geométrica

- Típica da Grécia Antiga
- Assunto do Livro II de Os Elementos de Euclides
- Um número é representado por um segmento de reta

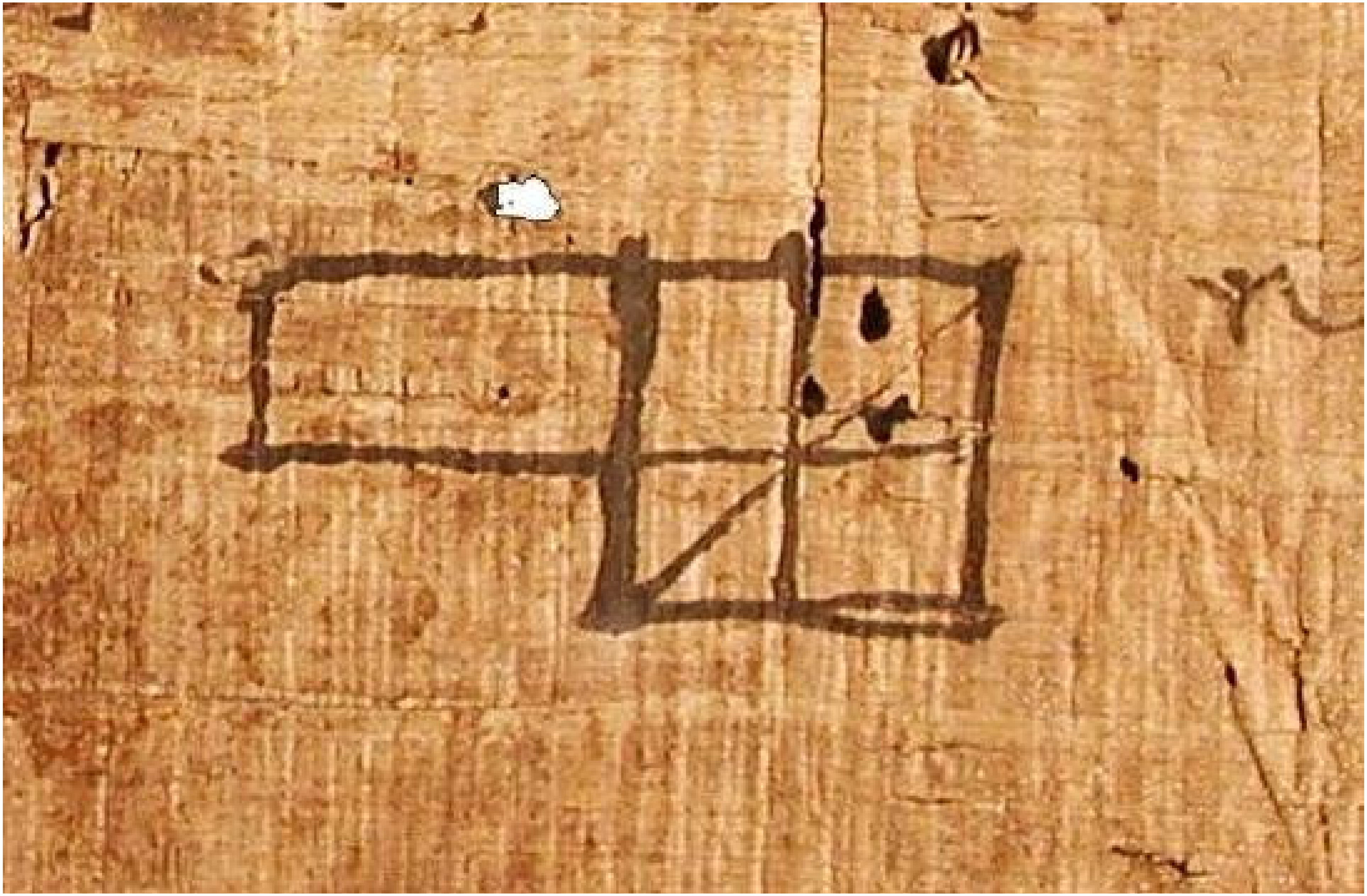


Álgebra Geométrica
Livro II de Os Elementos de Euclides (300aC)

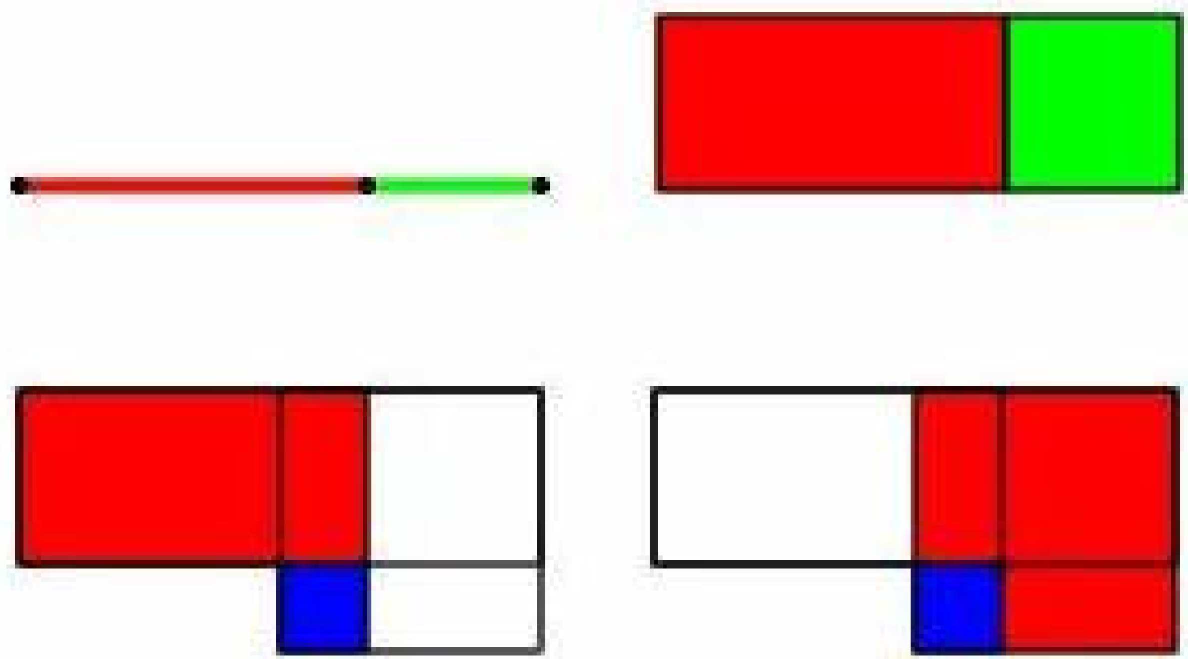
Fragmento da Proposição 5

$\boldsymbol{ab + (a\text{-}b)^2/4 = (a+b)^2/4}$

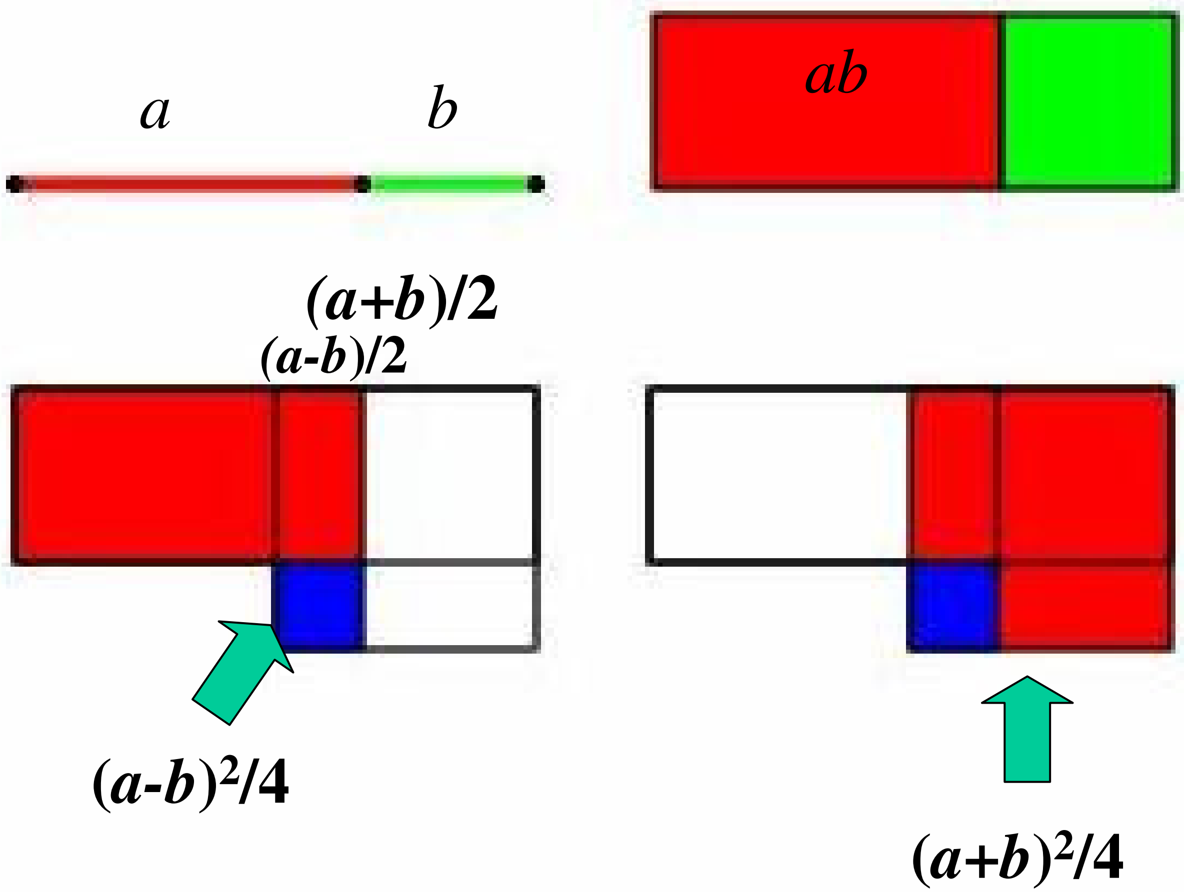
Fragmento da Proposição 5: $\boldsymbol{ab + (a\text{-}b)^2/4 = (a+b)^2/4}$



$$ab + (a-b)^2/4 = (a+b)^2/4$$



$$ab + (a-b)^2/4 = (a+b)^2/4$$



Fórmula de Bháskara

Nome dado no Brasil à fórmula da equação do 2º grau em homenagem a Bháskara
(ou Bháskara II ou Bhaskaracharya – Bháskara o Professor)

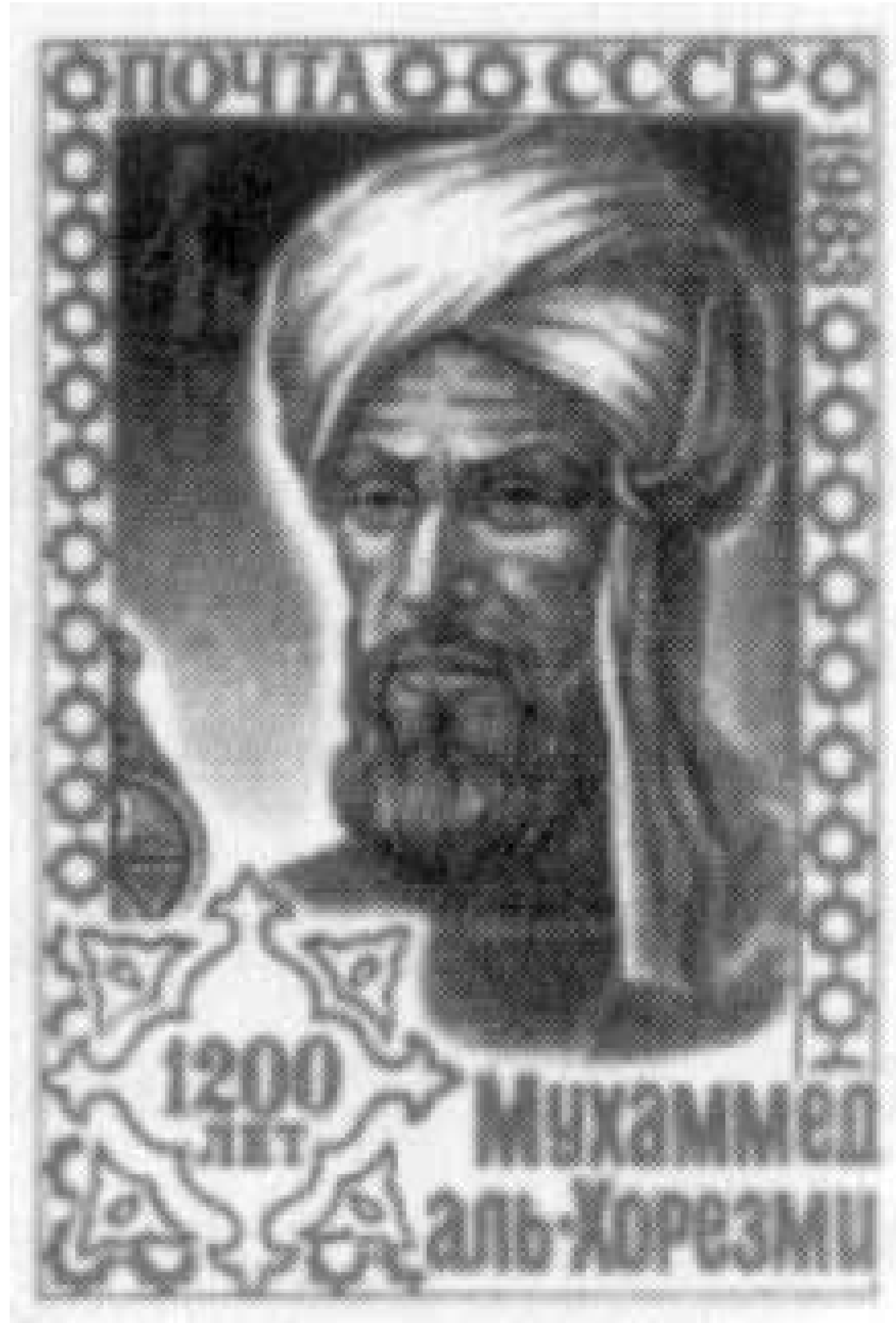
Astrônomo hindu que viveu entre 1114 e 1185.

Chefe do observatório astronômico de Ujjain, na Índia, local onde já tinham trabalhado os astrônomos e matemáticos Varahamihira (505 - 587) e Brahmagupta (598 - 670).

Bháskara I (c. 600 - c. 680)
Primeiro a escrever no sistema decimal indo-arábico usando um círculo para o zero.

Os hindus desenvolveram os métodos babilônios e Brahmagupta (598-665) usava já abreviações para incógnitas e admitia valores negativos.

Os árabes não lidavam com negativos nem tinham abreviações, mas Al-Khwarizmi (800) classificou os diversos tipos de equações algébricas usando raízes, quadrados e números que, em linguagem moderna, seriam x, x^2 e constantes.



Al-Khwarizmi

- Escreve o livro *Al-kitab al muhta-sar fy hisab al jabr wa al-muqabalah* (O livro breve para o cálculo da *jabr* e da *muqabalah*)
- No prefácio "enfatiza seu objetivo de escrever um tratado popular que, ao contrário da matemática teórica grega, sirva a fins práticos do povo em seus negócios de heranças e legados, em seus assuntos jurídicos, comerciais, de exploração de terra e de escavação de canais" (p. 17).
- Álgebra retórica, mas que também usava figuras geométricas nas demonstrações.

Jabr e Muqabalah

1) Jabr: Restabelecer, restaurar à “forma adequada” (*álgebra* na Espanha, significava ortopedista).
- A “forma adequada” é aquela que não contém números negativos

2) Muqabalah: estar frente-a-frente
- Eliminar termos iguais de ambos os lados da equação.

Fórmula de Bháskara: vem da relação entre quadrados

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Fórmula de Bháskara: uma aplicação de quadrados perfeitos

A organização dos processos resolutivos de equações se dá na Europa. Em 1494 surgiu na Europa a primeira edição de *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, de Luca Pacioli.

Já resolvia alguns tipos de equações de grau 4.

Frei Luca Pacioli (1445-1517)

Scipione del Ferro (1465-1526) era professor da Universidade de Bologna e conheceu Pacioli quando este visitou Bologna nos anos 1501-2.

Del Ferro conseguia resolver a cúbica da forma $x^3 + mx = n$.

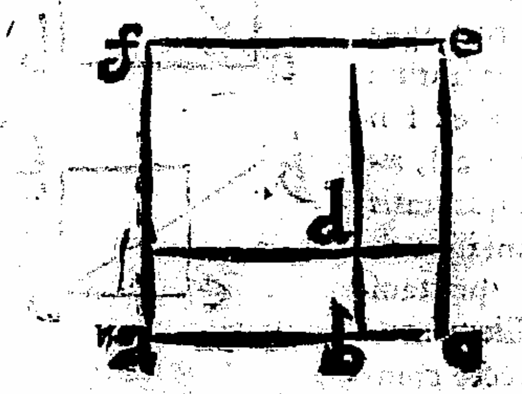
Como ele teria chegado à fórmula?

CAPVT XII.

De Cubo æquali rebus & numero.

DEMONSTRATIO.

SIT etiam cubus æqualis rebus & numero, & sint duo cubi d c & d e, quorum latera a b & b c, producant tertiam partem numeri rerum, inuicem ducta, & ipsi cubi iuncti æquales illi numero, dico a c esse rei quæsitæ æstimationem, cùm enim ex a b in b c fiat tertia pars numeri rerum, ex a b in b c ter, fiet numerus rerum, & ex a c in productum ex a b in b c ter, fient res ipsæ, posita a c re, at ex a c in produ-



ctum a b in b c ter, fiunt sex corpora, quorum tria sunt ex a b in quadratum b c, alia tria ex b c in quadratum a b, hæc igitur sex

cubicam 20. p̃. ℞. 392 p̃. ℞. v. cubica 20. m̃. ℞. 392. Aliud, cubus æquatur 6. rebus p̃. 6. tertiam partem numeri rerum, quæ est 2. ad cubũ ducito, fit 8. detrahe ex 9. quadrato dimidij 6 numeri æquationis, relinquitur 1. cuius ℞. est 1. hanc adde & minue à 3. dimidio numeri, fiunt partes, 4. & 2. quarum ℞. cubicæ iunctæ, faciunt ℞. cubicam 4. p̃. ℞. cubica 2. æstimationem rei.

At vbi cubus tertiæ partis numeri rerum, excedat quadratum dimidij numeri, æquationis, quod accidit quandocunque numerus æquationis est minor $\frac{3}{4}$ cubi illius, vel vbi ex $\frac{2}{3}$ numeri rerum, producitur in ℞. $\frac{1}{3}$ eiusdem numeri maior numerus numero æquationis, tunc consules librum Alizæ hîc adiectum.

CAPVT XIII.

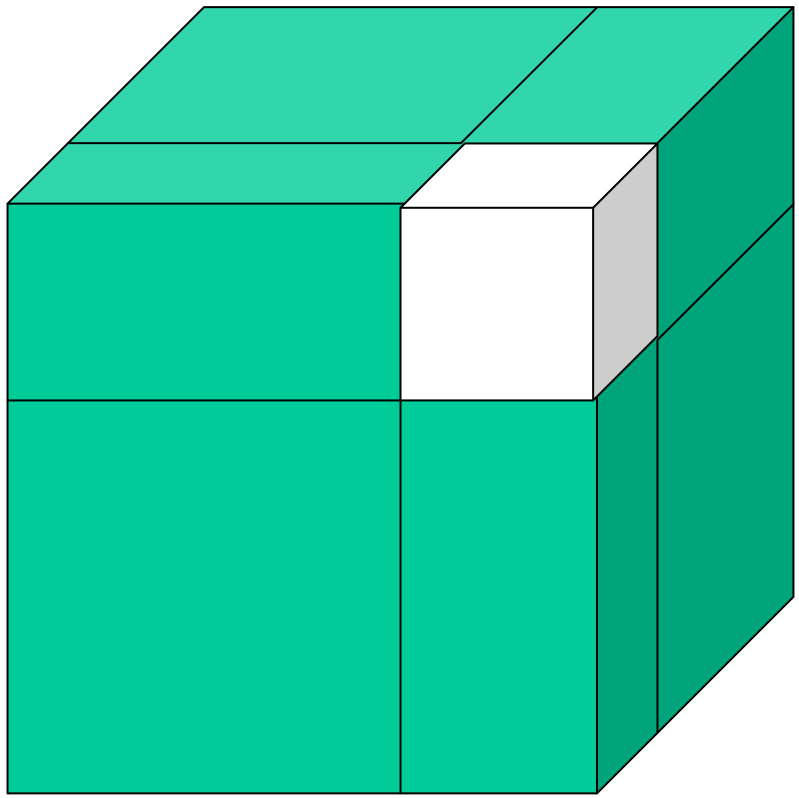
De Cubo & numero æqualibus rebus.

DEMONSTRATIO.

HOc capitulum ex præcedenti trahitur, sit igitur cubus g h, æqualis rebus a b, quæ describuntur quadrata superficie & numero f, & sit basis cubi g h, quadratum g k, cuius pars quarta sit h l resi-

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



Livro 10 de “Os Elementos” de Euclides (300 aC)

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$$

$$x^3 + mx = n$$

Onde:

$x = a - b$
$m = 3ab$
$n = a^3 - b^3$

$$b = \frac{m}{3a} \Rightarrow n = a^3 - \left(\frac{m}{3a}\right)^3$$

$$a^3 n = a^6 - \frac{m^3}{27}$$

$$a^6 - na^3 - \frac{m^3}{27} = 0$$

$$\left(a^3\right)^2 - n\left(a^3\right) - \frac{m^3}{27} = 0$$

$$a^3 = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4\frac{m^3}{27}}}{2}$$

$$a^3 = \frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}$$

$$\therefore b^3 = a^3 - n = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}$$

Temos:

$$a^3 = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2} \qquad b^3 = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}$$

Como $x = a - b$ então

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} - \frac{n}{2}}$$

Fórmula de Cardano para $x^3 + mx = n$

Tartaglia (1499-1557)

Pouco antes de morrer em 1526, Scipione revelou seu método para seu aluno Antonio Fior.

Fior espalhou a notícia e logo Nicolo de Brescia, conhecido como Tartaglia, conseguiu resolver equações da forma $x^3 + mx^2 = n$ e também espalhou a notícia.

Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública e cada um podia dar ao outro 30 problemas com 40 ou 50 dias para resolvê-los.

Girolamo Cardano (1501-1576)

Tartaglia resolveu todos os problemas de Fior em 2 horas, pois todos eram do tipo
$x^3 + mx = n$.
Mas 8 dias antes do fim do prazo, Tartaglia encontrou um método geral para todos os tipos de cúbicas.

Essa notícia chegou a Girolamo Cardano em Milão onde ele se preparava para publicar sua *Practica Arithmeticae* (1539).
Cardano convidou Tartaglia para visitá-lo.

Cardano convenceu Tartaglia a contar para ele seu segredo, prometendo aguardar até que Tartaglia o tivesse publicado, mas em 1545 Cardano publicou o segredo de Tartaglia em seu *Ars Magna*.
Nessa obra, Cardano resolve $x^3 + mx = n$.

Cardano percebeu algo estranho quando aplicava o método a $x^3 = 15x + 4$, obtendo uma expressão envolvendo a raiz quadrada de -121.

Girolamo Cardano (1501-1576)

credat. Huius æmulatione Nicolaus Tartalea Brixellensis, amicus noster, cum in certamen cum illius discipulo Antonio Maria Florido venisset, capitulum idem, ne vinceretur, inuenit, qui mihi ipsum multis precibus exoratus tradidit. Deceptus enim ego verbis Lucæ Paccioli, qui ultra sua capitula, generale ullum aliud esse posse negat (quanquam tot iam antea rebus à me inuentis, sub manibus esset) desperabam ta-

Cardano sabia que x = 4 era uma solução da equação. Então escreveu para Tartaglia em 4
de agosto de 1539 para tirar sua dúvida. Tartaglia não soube explicar, então Cardano publicou sua solução que envolvia “números complexos” sem entendê-los, dizendo que isso ira “tão sutil quanto inútil”.

Girolamo Cardano (1501-1576)

Na equação $x^3 = 15x+4$

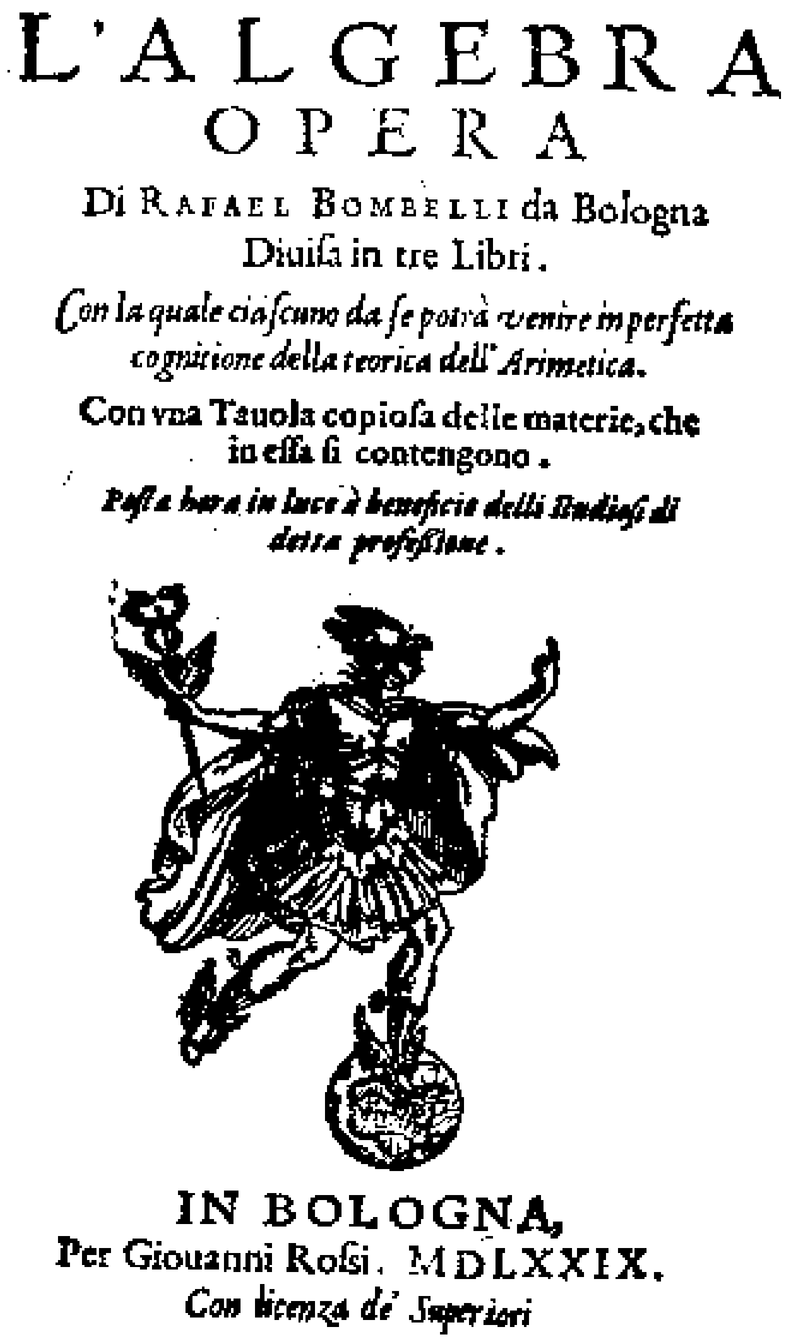
$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-15}{3}\right)^3}+\frac{4}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(\frac{-15}{3}\right)^3}-\frac{4}{2}}$$

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{4-125}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{4-125}-2}$$

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{-121}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$$

Mas sabemos que x = 4 é solução da equação, pois 64=15x4+4.

Como é possível?



L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Esse caso irredutível da cúbica, em que a fórmula de Cardano leva a uma raiz quadrada de número negativo, foi resolvido por Rafael Bombelli em 1572.

Bombelli dá pela primeira vez forma às operações com números complexos (sem saber bem o que eles eram).

Bombelli e seu "pensamento rude". Ele pensou que:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = p+\sqrt{-q}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = p-\sqrt{-q}$$

Então

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = (p+\sqrt{-q})(p-\sqrt{-q})$$

$$\sqrt[3]{4+121} = p^2+q$$

Ou seja $$5 = p^2+q \qquad \text{(I)}$$

Além disso, $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = p+\sqrt{-q}$

$$2+\sqrt{-121} = p^3 + 3p^2\sqrt{-q} + 3p(-q) + \left(\sqrt{-q}\right)^3$$

$$2+\sqrt{-121} = \left(p^3 - 3pq\right) + (3p^2 - q)\sqrt{-q}$$

$$2 = p^3 - 3pq \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), $p^3 - 3(5-p^2)p = 2$

$$p^3 - 15p + 3p^3 = 2$$

$$4p^3 - 15p = 2$$

$$4p^3 - 15p = 2$$

Dessa equação cúbica, temos que $p = 2$ e $q = 1$.
Portanto Bombelli obteve a chave do seu enigma:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

Portanto, a raiz pode ser obtida por

$$x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$$

Alguns processos criativos:

- construir metáforas;
- provocar transformações;
- formar associações;
- reconhecer similaridades;
- reconhecer a natureza do problema;
- representá-lo internamente;
- decidir qual das soluções é mais promissora;
- escolher e organizar processos criativos;
- combinar estratégias de pensamento para desenvolver novas linhas de ataque ao problema.