19. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica

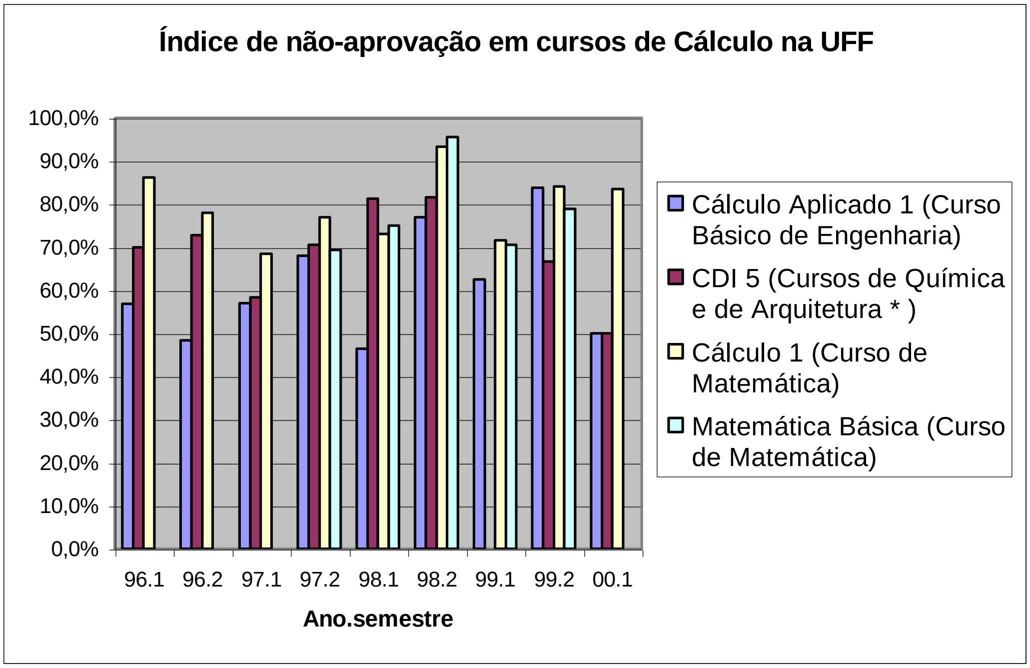
Wanderley Moura Rezende

O problema

Um dos grandes desafios no ensino superior de matemática ainda é, sem dúvida, o tão propalado "*fracasso no ensino de Cálculo*". Creio que, se investigarmos a origem histórica de tal "fracasso", verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo.

Barufi (1999), em sua tese de doutorado, nos revela alguns dados alarmantes dessa crise: o índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45% - isto é, não se aprova mais do que 55% em uma turma de Cálculo.

No que diz respeito à UFF, instituição onde leciono, os índices de não-aprovação são bem mais catastróficos do que os levantados por Barufi, na USP. O gráfico a seguir descreve essa realidade a partir de um levantamento efetuado com base em dados disponíveis relativos ao período de 1996 a 2000.



Na UFF, a variação do índice de não-aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o Curso de Matemática, este não é inferior a 65%. Ainda no que tange aos dados do gráfico, gostaria de esclarecer dois pontos que permanecem tácitos sob a cortina dos índices apresentados: primeiro, que a partir de 1998 a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 5 não faz mais parte da grade curricular do curso de Arquitetura; e, por último, que a disciplina de Matemática Básica, introduzida na grade curricular do curso de Matemática / Niterói da UFF a partir do segundo semestre de 1997, tem por objetivo auxiliar e dar um "embasamento" à disciplina de Cálculo 1. Dados mais recentes (veja tabela 1), fornecidos pela coordenação do Curso de Matemática, sobre o índice de não aprovação dos alunos deste Curso em uma disciplina inicial de Cálculo I revelam, no entanto, que o problema está muito longe de ser resolvido.

ano.sem	Índice de não-aprovação (%) em Cálculo
00.1	24,4
00.2	85,4
01.1	59,5
01.2	71,1
02.1	69,5
02.2	93,2

Tabela 1 - elaborada a partir dos dados fornecidos pela Coordenação de Matemática da UFF (GGT)

O relato desses fatos serve para dar a dimensão exata da gravidade do problema do ensino de Cálculo. Excluir o Cálculo de sua grade curricular ou criar disciplinas subsidiárias para o seu ensino representam, sem dúvida, indícios de que o tal problema já atinge limites próximo do insuportável.

Tal situação de desconforto com relação ao ensino de Cálculo não é local e nem característica exclusiva da UFF; é geral e tem provocado, por parte de outras instituições, atitudes inusitadas. Na USP, por exemplo, como nos relata Barufi (1999), as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral oferecidas para os cursos de Matemática e Arquitetura passam a ser anuais a partir de 1993, contrapondo-se ao padrão da periodicidade semestral das demais disciplinas. Levando-se em conta a tradição de excelência, pelo menos em termos nacionais, das Instituições aqui reportadas, há de se preocupar, e muito, com o "fracasso do ensino de Cálculo".

Engana-se quem pensa que tal problema é cultural e que se justifica pela condição sócio-econômica da sociedade brasileira. A situação do ensino de Cálculo nos países "desenvolvidos" não é muito diferente, visto que trabalhos sobre esse tema têm sido publicados e recebidos merecido destaque por parte da literatura especializada internacional. David Tall (1976), por exemplo, tem sido um dos principais articuladores da área de pesquisa "*pensamento matemático avançado"*, cujas questões giram em torno das dificuldades encontradas nas aprendizagens dos conceitos básicos do Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para as suas análises epistemológicas.

Outro exemplo internacional desta inquietação foi o movimento em prol da reforma do ensino de Cálculo, iniciado na década de 80, e que ficou conhecido por "*Calculus Reform*" (ou Cálculo Reformado). Tal movimento teve como elemento deflagrador um polêmico documento do famoso matemático Peter Lax, que atacava os cursos de Cálculo da época.

Segundo seus precursores, o "Calculus Reform" tem como características básicas: o uso de tecnologia, isto é, software computacional e calculadoras gráficas, tanto para o aprendizado de conceitos e teoremas como para a resolução de problemas; o ensino via a "*Regra dos Três"*, isto é, todos os tópicos e todos os problemas devem ser abordados numérica, geométrica e analiticamente; grande preocupação, ou pretensão, em mostrar a aplicabilidade do Cálculo através de exemplos reais e com dados referenciados; tendência a exigir pouca competência algébrica por parte dos alunos, suprindo essa falta com o treinamento no uso de Sistemas de Computação Algébrica.

Um reflexo deste movimento nas universidades brasileiras já começa a ser percebido através do crescente número de trabalhos com esse perfil e apresentados recentemente nos Encontros Nacionais de Educação Matemática. A construção de laboratórios informatizados e a introdução de softwares matemáticos no ensino de Cálculo têm sido a tônica das mais recentes propostas didáticas para esta disciplina. Seria então o uso de computadores a redenção para o ensino de Cálculo? Dados fornecidos no início desse artigo (figura 1 e tabela 1) revelam que a coisa não é bem assim. Na UFF, por exemplo, apesar do uso de laboratórios e softwares no ensino de Cálculo I, verifica-se que não houve avanço significativo na melhoria dos resultados finais.

Com base na problemática aqui apresentada surgem algumas questões interessantes: Qual é a razão de tantas reprovações? Onde reside a dificuldade? No processo de aprendizagem? No aluno, isto é, na *"falta de base"* do aluno? Ou estaria esta dificuldade no próprio professor, ou na metodologia de ensino, ou ainda, na estrutura curricular do ensino de matemática que não dá o suporte que esta disciplina mereceria?

Diante da complexidade do problema, tem sido muitos as respostas e os encaminhamentos apresentados pelos pesquisadores da área. Uns preferem justificar o problema no âmbito da psicologia cognitiva: acreditam que o problema é de natureza psicológica, isto é, os alunos não aprendem por que não possuem *estruturas cognitivas* apropriadas que permitam assimilar a complexidade dos conceitos do Cálculo. É o caso, por exemplo, do grupo de pesquisadores, liderados por David Tall, que nos referimos anteriormente e desenvolvem trabalhos na área de *"pensamento matemático avançado".*

Há quem julgue, no entanto, que o problema é de natureza mais simples: as dificuldades de aprendizagem são decorrentes do processo didático, isto é, a solução reside em se encontrar uma forma apropriada para se ensinar a disciplina de Cálculo. O movimento "Calculus Reform", citado por nós alguns parágrafos acima, é, por exemplo, uma clara demonstração da existência de tal pensamento.

Não obstante, pensamos de forma diferente: acreditamos que grande parte das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo é essencialmente de **natureza epistemológica.** Pode-se dizer ainda mais: as raízes do problema estão *além dos métodos e das técnicas*, sendo inclusive *anteriores* ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo.

De fato, os resultados da tese de doutorado (Rezende, 2003) que realizamos ratificam este nosso pensamento. Na referida tese foi elaborado, a partir do entrelaçamento dos fatos históricos e pedagógicos, um mapeamento das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo. Tendo como pano de fundo as dualidades essenciais e os mapas históricos conceituais do Cálculo, foram consolidados e consubstanciados pelo autor da tese cinco macro-espaços de dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo. Os macro-espaços aqui determinados foram identificados pelas cinco dualidades fundamentais do Cálculo e do seu ensino: *discreto/contínuo; variabilidade/permanência; finito/infinito; local/global; sistematização/construção.*

O macro-espaço da dualidade discreto/contínuo

O que se percebe tanto pelas atitudes dos nossos alunos de Cálculo quanto pela forma como o conteúdo matemático do ensino básico de matemática está estruturado é uma total ignorância das idéias do campo semântico desta dualidade. Dois elementos caracterizam bem esta "cegueira": o hiato entre os campos da aritmética e da geometria no ensino básico de matemática e o círculo vicioso presente na significação de número real realizada pelos nossos alunos (a idéia de número irracional é definido como sendo o número real que não é racional, mas, por outro lado, o conjunto dos números reais é obtido pela reunião dos conjuntos dos números racionais e irracionais). Assim, pode-se dizer que o domínio numérico da quase totalidade de nossos alunos (mesmo aqueles que já tenham feito um curso de Cálculo ou Análise) se restringe aos racionais. Não sabem responder o que um número real é porque, como diria Caraça (1989), não conhecem o reagente básico (o conceito de continuidade) de seu processo de construção.

O macro-espaço da dualidade variabilidade/permanência

No que diz respeito ao campo semântico dessa dualidade pode-se perceber, no âmbito do ensino superior de matemática, uma predominância da abordagem estática sobre a abordagem dinâmica das idéias básicas do Cálculo. No conceito de derivada, por exemplo, prevalecem os seus aspectos formal (como sua definição em termos de limite) e geométrico (como o coeficiente angular da reta tangente) sobre a sua interpretação dinâmica em termos de taxa de variação instantânea. Interpretar o conceito de derivada tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza.

O mesmo ocorre com a noção de função. Desde cedo no ensino básico de matemática, é introduzido um viés algébrico em seu processo de significação. No estudo das funções reais a variável "x" é assumida tacitamente como a "variável independente universal". Cabe, entretanto, ressaltar que a idéia de função é estabelecida aqui, não no contexto da "variabilidade", mas, em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis "x" e "y". O gráfico da função é, em geral, "plotado" através de uma tabela em que os valores "notáveis" são escolhidos pelo professor. A curvatura das curvas que compõem o gráfico da função é, em geral, induzida pelo professor que tenta convencer o aluno, pelo acréscimo de mais pontos, ou mesmo através de um sofisticado programa computacional, que a única possibilidade é a dele - professor. Isto posto, procura-se estudar em seguida as propriedades algébricas do conceito construído. Fala-se, por exemplo, em injetividade ou sobrejetividade, mas não em crescimento ou decrescimento da função, ou melhor, em quanto e como cresce/decresce o valor de uma função em relação à sua variável independente. Discutem-se (caso existam) os zeros e o período da função, mas não os seus pontos críticos, que são, em verdade, os elementos de articulação do esboço do gráfico de uma função real de uma variável (também real).

Assim, a função, agora também identificada pelo seu gráfico, surge da "plotagem" dos pares (x,f(x)) no plano cartesiano xy. E é assim, em termos da correspondência (x,f(x)) que se estabelece a representação que o nosso estudante tem de função. Note que, neste caso, a função (a expressão analítica) é dada e sua representação é construída através de um procedimento estático, estético e induzido por propriedades algébricas da função. Esta idéia de função não está errada conceitualmente, ao contrário, ela representa a forma como Dirichlet (1837) conceituou a noção de função: *"Uma função y(x) é dada de temos qualquer regra que associe um valor definido y a cada x em um certo conjunto de pontos"* – (*apud* Rüthing, 1984). Por outro lado, tal idéia de função, caracterizada pelo seu formato algébrico, se encontra na contra-mão da história do Cálculo. Aliás pode-se dizer mais: pode-se dizer que tal interpretação, além de não ter participado historicamente da solução do problema da variabilidade dada pelo Cálculo, constitui efetivamente um dos maiores obstáculos epistemológicos àquela noção de interdependência entre quantidades variáveis, tão essencial para o desenvolvimento do Cálculo.

De fato, alguns dos principais obstáculos de aprendizagem para os alunos de um curso de Cálculo são os ditos "problemas de taxas relacionadas" e os "problemas de otimização". Segundo Cabral (1998, p.153-4), a grande dificuldade dos estudantes na resolução de problemas dessa natureza consiste realmente em "enxergar" as quantidades variáveis envolvidas no problema e principalmente a relação funcional existente entre elas: *"o difícil mesmo é encontrar a função"....* Isso mesmo, como exigir agora desse aluno que "enxergue" o conceito de função, se até o momento, a função sempre foi dada "pronta" para ele? Como pode ele "enxergar" as "variáveis" do problema, se até agora estas eram apenas "letras" (x e y, de modo geral) que representavam números que se relacionavam segundo uma lei de correspondência explicitada *a priori*? Identificar o que varia, e em função de que varia é, sem dúvida, o primeiro passo para a resolução da questão.

Assim, pode-se assegurar pelo que foi exposto anteriormente, que a razão principal para as dificuldades de aprendizagem na resolução de problemas de taxas relacionadas e de otimização é, efetivamente, esse desvio epistemológico do conceito de função, realizado desde cedo nos ensinos médio e fundamental de matemática, de modo viesado para o campo algébrico. O pior de tudo isso é que os professores de Cálculo (e alguns autores de textos didáticos da área), em geral, reforçam ainda mais esse viés algébrico do conceito de função quando fazem uma "breve revisão" deste conceito.

Além disso, pode-se perceber a presença desse viés algébrico em outro conceito fundamental do Cálculo: o conceito de integral definida. Com efeito, com o descolamento da dualidade discreto/contínuo do conceito de integral, estimulado principalmente pelo uso do Teorema Fundamental do Cálculo, o ato de integrar é identificado pelo aluno ao ato de encontrar a antiderivada da função do integrando. É salutar que o aluno saiba interpretar e usar o T.F.C. para realizar os seus cálculos de integrais. No entanto, não se pode dizer o mesmo do exaustivo treinamento em "técnicas de integração" que levam o aluno, entre outras coisas, a ignorar o significado do conceito de integral e a encará-la como um procedimento algébrico. Para se apreender o significado de integração é preciso que se explore mais as tramas e urdiduras da sua malha de significações. Calcular uma integral através de processos numéricos aproximados, ou mesmo usando determinados tipos de séries – como fizeram Newton, Euler e outros – também são exercícios que contribuem para o processo de tecedura da noção de integral. A noção deve ser explorada então na sua totalidade, e não reduzida simplesmente ao ato algébrico de encontrar uma antiderivada da função através das "técnicas de integração". O mesmo *exagero da técnica* ocorre em relação ao processo de significação do conceito de derivada. Calcular exaustivamente derivadas de funções através das regras usuais de derivação não leva o aluno a construir efetivamente o significado desta operação.

O macro-espaço da dualidade finito/infinito

"O infinito e a indivisibilidade são de naturezas muito incompreensíveis para nós (os humanos)" – já dizia Galileu. O grande mestre da física tinha consciência das dificuldades inerentes à noção de infinito, ainda que sua morte antecedesse à "invenção" do Cálculo em aproximadamente trinta anos. Assim, apesar da complexidade do conceito de infinito, é, no mínimo, curioso que nossos estudantes não tenham sequer consciência das dificuldades referentes à noção de infinito, mesmo tendo eles já realizado um curso de Cálculo ou mesmo de Análise. Isso nos leva a concluir que cursar ou não cursar as referidas disciplinas, tal como se encontram organizadas nos dias de hoje, não faz diferença alguma para a instrução do aluno nesse assunto. Evidências do que aqui afirmamos podem ser encontradas, por exemplo, em Sierpinska (1987) e Rezende (1994).

Com efeito, nas referências supracitadas, por exemplo, pode-se verificar a predominância de atitudes ingênuas em relação aos processos infinitos. A idéia de limite, por exemplo, que prevalece nas atitudes de nossos estudantes é a posição potencialista: isto é, aquela em que diz que uma seqüência "tende", mas não alcança, o seu ponto limite. Outro fato que fornece evidências do caráter ingênuo das atitudes dos estudantes em relação ao infinito diz respeito às "simplificações algébricas" que realizam no cálculo dos limites. Não reconhecem as situações de indeterminação presentes em cada um dos limites e procuram traduzir e "resolver" as indeterminações através de uma espécie de álgebra do infinito. O interessante é que o infinito, que "não é nada", ou "é apenas um símbolo matemático", passa a se comportar agora como número. Cabe ressaltar ainda que os estudantes, mesmo quando estimulados a realizarem uma interpretação mais formal do conceito de infinito, não realizam suas interpretações e tipificações no contexto da dualidade discreto/contínuo; não reconhecem, enfim, as especificidades do infinito matemático contínuo. Exemplos concretos desses procedimentos podem ser verificados com detalhes em Sierpinska (1987) e Rezende (1994), ou mesmo em qualquer sala de aula de um curso inicial de Cálculo.

Isto posto, fica evidente que a idéia de infinito não participa e nem contribui de forma significativa na construção das redes de significações estabelecidas num curso usual de Cálculo. As atitudes ingênuas dos estudantes em relação às operações infinitas e às indeterminações matemáticas são fatos evidentes disso. O infinito é um elemento estranho para o nosso aluno do ensino médio e, por conseguinte, para o nosso aluno de Cálculo. Mas continua estranho para o estudante, mesmo após um curso de Análise. Alguns desses estudantes agora são professores de matemática, lecionam nos ensinos médio e fundamental, e o conceito de infinito continua estranho para a maioria deles. Com isso, reproduzem o ciclo que eles próprios vivenciaram.

O macro-espaço da dualidade local/global

Ao contrário das dualidades discutidas até agora (discreto/contínuo, variabilidade/permanência e finito/infinito) neste trabalho, a história da oposição local/global é recente, podendo ser datada, segundo Petitot (1985, p.11), de meados do século XIX, aproximadamente. *"Fundada originariamente na intuição espacial"*, a oposição local/global invadiu o campo matemático e estabeleceu com este uma relação de simbiose que lhe rendeu um arcabouço de conhecimentos que possibilitaram, nestes últimos anos, o desenvolvimento de novas interpretações e significações no campo da epistemologia.

A oposição local/global é, sem dúvida, *a priori*, um produto de nossa percepção do espaço, mas, evidentemente, não se esgota nela. Com efeito, a simulação euclidiana do espaço, apreendida pela percepção humana, é tão somente uma aproximação local do que ele efetivamente é. E é no desenvolvimento histórico da geometria, que Petitot localiza a contribuição essencial do Cálculo para o surgimento das primeiras relações solidárias entre o local e o global:

> *Até o fim do século XIX, a geometria reduz-se essencialmente ao estudo de objetos geométricos imersos num espaço bi- ou tridimensional. Os métodos utilizados são, por um lado, os métodos sintéticos herdados da tradição euclidiana e, por outro lado, os métodos analíticos e algébricos fundados no uso de coordenadas. Com a introdução do cálculo infinitesimal, as coordenadas permitem a análise das propriedades diferenciais dos objetos (equação das tangentes, das normais, estruturas dos pontos singulares, etc.). Assim aparecem os primeiros teoremas gerais sobre as curvas algébricas e a "solidariedade" que existe entre a sua estrutura local e a global.*
>
> (Petitot, 1985, p.21)

Assim, com base na datação histórica do surgimento da oposição local/global, pode-se concluir que esta dualidade não participou efetivamente da "invenção" do

Cálculo. Com efeito, tanto Newton quanto Leibniz não faziam distinção e sequer relacionavam os conceitos locais e as propriedades globais das "curvas" que diferenciavam e integravam. No Cálculo de Newton, por exemplo, os conceitos de continuidade e diferenciabilidade - conforme já foi dito neste trabalho - se identificavam e eram definidos a partir do comportamento global das curvas. Assim, para o matemático inglês a curva da figura 2 era o desenho de duas curvas diferenciáveis, e não o de apenas uma curva, que deixa de ser diferenciável em apenas um ponto. A noção de diferenciabilidade é, portanto, uma característica global da curva.

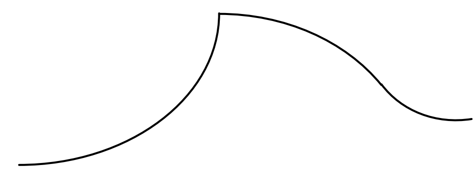


figura 2

Leibniz, assim como Newton, também considerava a noção de diferenciabilidade de uma curva no nível global. Em verdade, tanto Newton quanto Leibniz não explicitaram o conceito de diferenciabilidade localmente, apesar de efetuarem os seus cálculos em certas ocasiões no nível local. Dois fatores justificam a ausência de considerações locais nestas duas versões iniciais do Cálculo:

– Uma primeira relacionada ao "bom" comportamento das curvas freqüentemente utilizadas nos cálculos de Newton e Leibniz; tais curvas eram, em geral, "bem comportadas" (no mínimo, diferenciáveis) e, por causa disso, tal comportamento não suscitava questões de natureza local. Para a determinação local da tangente (da derivada) a propriedade de diferenciabilidade era assumida implicitamente pela característica global da curva.

– Faltavam aos matemáticos dois conceitos fundamentais para que pudessem vislumbrar a íntima relação da dualidade local/global com o Cálculo que acabavam de "inventar": a noção de limite e o conceito de função.

De fato, o conceito de função, introduzido no núcleo semântico do Cálculo por Euler e Lagrange, vai constituir, junto com a noção de limite, a urdidura da nova estrutura do Cálculo. O Cálculo começa, a partir de então, a se preocupar com questões essenciais da dualidade local/global, tornando-se, por sua vez, e cada vez mais, uma rede de significações e correlações entre os pólos dessa dualidade. Esta nova versão, impregnada de conceitos e resultados que estabelecem correlações entre níveis locais e globais, constitui e representa parte substancial do conteúdo programático de um curso inicial de Cálculo normalmente ensinado em nossas universidades. Tais correlações inerentes à dualidade local/global, bem como as relações de significações estabelecidas em cada um dos níveis, originam algumas das maiores dificuldades de aprendizagem dos alunos de Cálculo, em geral.

Vimos nos parágrafos anteriores que a dualidade local/global participa de forma tardia da história do Cálculo (datada como século XIX por Petitot). No ensino de matemática, a participação dessa dualidade é retardada ao máximo. Excetuando os tópicos referentes a "conjuntos" e "noções de lógica", a oposição local/global passa desapercebida pelos alunos e seus professores de matemática dos ensinos médio e fundamental. O que não faltariam são oportunidades. Polinômios, função exponencial, assim como outros tópicos do ensino de matemática, poderiam ser explorados sob a luz da oposição local/global. No entanto, ao ingressar no curso superior e fazer um curso inicial de Cálculo, o estudante se depara com diversas situações do contexto dessa dualidade. Esta imersão tardia em questões de natureza local/global suscita nos alunos algumas dificuldades de interpretação dos conceitos e resultados "normalmente" apresentados num curso de Cálculo.

Com efeito, os conceitos do Cálculo são definidos, na sua maioria, localmente – *continuidade num ponto, diferenciabilidade num ponto, etc.* – e estendidos, em geral, de forma "natural" para o seu estado global – *a função é diferenciável se ela o for em cada ponto do seu domínio, etc.*, mas, por outro lado, muitos dos seus resultados são de natureza global - *"se $f' > 0$ em um intervalo I, então f é crescente em I", o Teorema Fundamental do Cálculo, etc.* –, o que exige do aluno uma habilidade de ir e vir aos dois pólos – local e global – de significações do tema abordado. Assim, para assimilar a estrutura do resultado matemático, o aluno precisa saber propriamente as condições locais e/ou globais de suas hipóteses, do seu resultado (tese) propriamente dito e das correlações entre eles. Se tal habilidade não foi trabalhada com o aluno em fases anteriores de sua aprendizagem escolar, as conseqüências são, em geral, catastróficas: os resultados do Cálculo são deformados ou enfraquecidos pelos estudantes. As deformações aqui encontradas vão desde aplicações ingênuas das regras de diferenciação em cálculos de derivadas em circunstancias não muito apropriadas até o uso interpretações equivocadas do Teorema Fundamental do Cálculo. Poderíamos aqui detalhar um grande número desses exemplos, mas isso foge o escopo deste artigo.

O macro-espaço da dualidade sistematização/construção

Pode-se afirmar que o par sistematização/construção não constitui propriamente uma dualidade no sentido filosófico: não existe sistematização sem construção, nem construção sem sistematização. No entanto, as interpretações relativas ao processo de "construção" do conhecimento continuam sendo diferenciadas pelo termômetro ideológico do par sistematização/construção. E é precisamente essa diferenciação das atitudes epistemológicas balizadas pelo termômetro ideológico sistematização/ construção que constitui o cerne da dualidade que dá sustentação ao nosso quinto macro-espaço das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do Cálculo.

Por via de regra, a realização didática do ensino de Cálculo e os seus livros-texto seguem basicamente o princípio e o padrão de sistematização propostos por Cauchy e Weierstrass (limite – continuidade – derivada – diferencial – integral) para a organização das idéias e dos resultados do Cálculo. Em ambos os níveis, por exemplo, os conceitos são definidos formalmente e os resultados são demonstrados passo a passo segundo um modelo axiomático que parte da definição formal de limite e de alguns "postulados fundamentais" oriundos da Álgebra Moderna e da Análise Matemática, tais como: o conjunto dos números reais ser um corpo ordenado, propriedades relativas à ordem de R, o postulado de continuidade de Dedekind-Cantor, etc.. Cabe ressaltar, entretanto, que outros resultados são acrescidos e assumidos tacitamente como "postulados" durante o processo de execução do modelo.

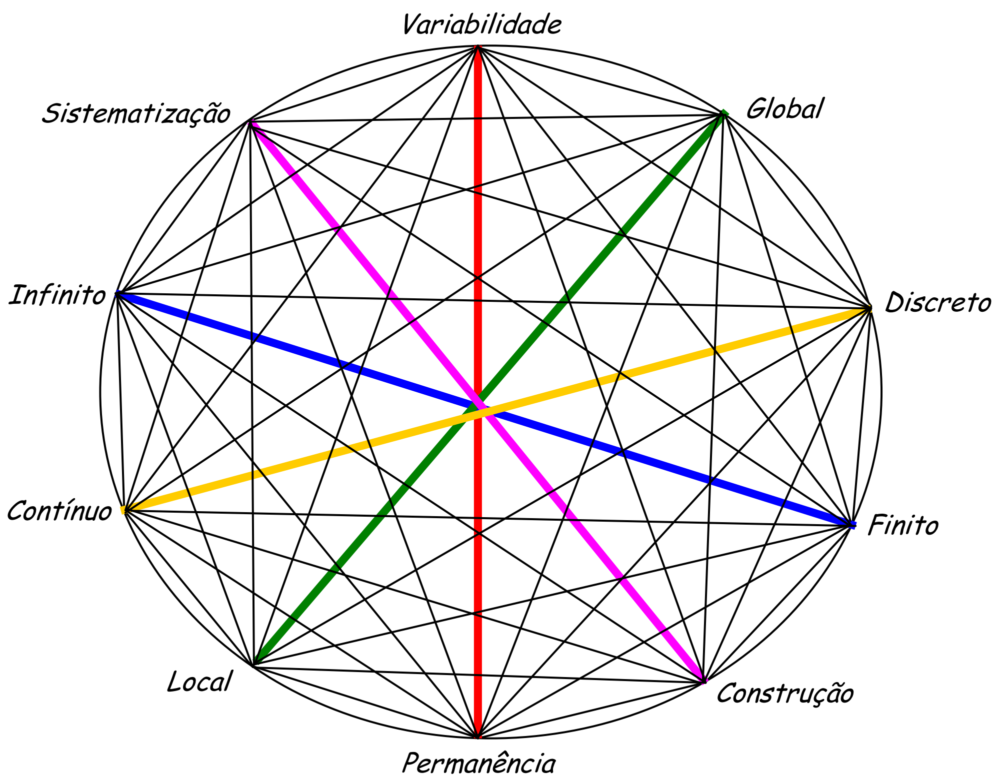
Exercícios de cálculos e fixação são acrescentados ao final de cada tópico do conteúdo programático para que o treinamento possa ser realizado. Nesta etapa, a influência das técnicas algébricas é facilmente evidenciada: fatorar polinômios, por exemplo, torna-se imprescindível para que se efetuem os cálculos de limites.

A significação dos conceitos e dos resultados é realizada no âmbito da justificação lógica formal das "definições" dos conceitos básicos e das "demonstrações" dos teoremas. Primeiro define-se o conceito, depois, apresentam-se os exemplos, como se estes nada tivessem a ver com a origem histórica do conceito definido. Assim, com essa sistematização exacerbada, surge um dos grandes obstáculos de natureza epistemológica do ensino normal de Cálculo: a "**desmaterialização"** dos seus resultados e conceitos básicos.

Com efeito, a definição formal de derivada, por exemplo, não terá sentido algum para o aluno, se não for consubstanciada com as redes de significações deste conceito com a geometria e com a física. Não são as idéias de velocidade e coeficiente angular, *interpretações do conceito de derivada*, mas, ao contrário, são elas, efetivamente, *as idéias geradoras e construtoras do campo semântico da noção de derivada*. Do mesmo modo, não é "simplesmente" demonstrando um teorema/proposição - ou o que é pior: apenas assistindo a sua demonstração - que se constrói a sua rede de significações. Muitas vezes a simples interpretação do resultado faz muito mais sentido para o aluno do que a sua demonstração.

Assim, para se recuperar o "real" nível de significação dos conceitos e resultados do Cálculo é preciso que se inverta a polaridade da dualidade sistematização/construção; isto é, ao invés de se construir as significações no nível do conhecimento já sistematizado, deveríamos é construir os campos de significações dos resultados e idéias básicas do Cálculo para, num momento posterior, buscar a sistematização desses elementos.

No entanto, para que se inicie a inversão de tal polaridade é preciso trazer à tona essa discussão fundamental acerca da oposição entre o "conhecimento sistematizado" (o dos livros didáticos e notas de aulas do professor) e o "conhecimento real" (o que traz consigo a sua história e o seu campo de significações) do Cálculo, sem o receio ou timidez de explicitar o que se pensa e pretende com um curso inicial de Cálculo. Tal questão precisa ser analisada e discutida pelos professores de Cálculo, em caráter emergencial, para que se possa minimizar efetivamente, nesse nível de ensino, os problemas de aprendizagem relativos a essa disciplina. Contudo, para resolver o problema do ensino de Cálculo, no entanto, é preciso muito mais: é preciso fazer o conhecimento do Cálculo emergir do "esconderijo forçado" a que foi submetido pelos atuais ensinos médio e fundamental de matemática. Ao se promover tal emersão, o Cálculo não estará ajudando apenas a si próprio, mas, sobretudo ao próprio ensino de matemática como um todo. Mantendo-se o Cálculo em cativeiro, alguns dos problemas fundamentais da geometria e da aritmética continuarão a ser "mal resolvidos" através de "fórmulas" e "regras" mágicas, e "convenções" unilaterais. Não se trata de antecipar a disciplina de Cálculo para o ensino médio – como, inclusive, já sugeriram alguns autores -, mas, sobretudo, de se iniciar, desde cedo, uma preparação para o Cálculo.



O lugar-matriz

A partir do mapeamento realizado foi observado, em essência, um único ***lugar-matriz*** das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo: o da **omissão/evitação das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo**.

De fato, a ausência das idéias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contra-senso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do "esconderijo forçado" a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo.

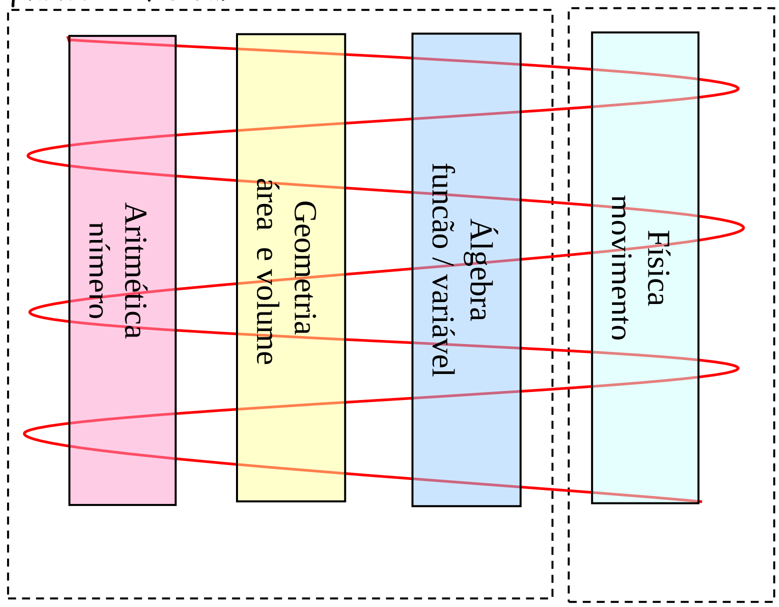
Ora, mas no próprio ensino superior de Cálculo também sentimos falta de certas idéias e problemas construtores do Cálculo. As significações e interpretações das noções de derivada e de integral definida – e de seus resultados - no contexto da mecânica são um exemplo dessa ausência. Em verdade, este esvaziamento semântico da disciplina de Cálculo é, ao mesmo tempo, causa e efeito da crise de identidade pela qual passa o ensino superior de Cálculo.

Isto posto, percebe-se que o *lugar-matriz* das dificuldades de aprendizagem do ensino de Cálculo está presente em ambos os níveis de ensino. Assim, procuraremos fazer a caracterização do lugar-matriz em dois tempos: primeiro, abordaremos os aspectos do lugar-matriz no âmbito do ensino básico de matemática; por último, cuidaremos dos aspectos do lugar-matriz relacionados a tal *crise de identidade do ensino superior de Cálculo*.

O lugar-matriz no ensino básico

Antes de tudo cabe destacar que a maior parte do território do *lugar-matriz* das dificuldades de aprendizagem do ensino superior de Cálculo encontra-se no ensino básico. A evitação/ausência das idéias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática. É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O Cálculo é, metaforicamente falando, a *espinha dorsal* do conhecimento matemático.

É muito usual afirmar-se no meio acadêmico que o ensino básico de matemática é (ou pelo menos deveria ser) processado em três vias: a via da aritmética, a via da geometria e a via da álgebra. Uma pergunta que surge naturalmente dessa questão é "cadê a via do Cálculo?". No entanto, pode-se dizer que o que se quer aqui está muito além de simplesmente construir a quarta via: a via do Cálculo. O que se quer, isto sim, é possibilitar ao Cálculo exercer no ensino básico de matemática o mesmo papel epistemológico que ele realizou no processo de construção do conhecimento matemático no âmbito científico. Só que para que isto ocorra será também necessária uma articulação do ensino de matemática com outras áreas do conhecimento como, por exemplo, a física, mais precisamente, a mecânica. Desse modo, as três vias – a da aritmética (número), a da geometria (medida) e a da álgebra (variável) – juntas com a via da mecânica (movimento), devem ser articuladas e tecidas a partir das idéias e problemas construtores do Cálculo em benefício, não só de uma preparação de natureza epistemológica para um futuro ensino superior de Cálculo, mas, sobretudo, para a consolidação e construção das significações propostas no ensino básico tanto de matemática quanto de física.



Por outro lado, é notório que estão presentes alguns resultados do Cálculo no ensino básico de matemática: cálculo de áreas de círculos e de volumes de sólidos de revolução, soma de uma progressão geométrica infinita, representação decimal dos números reais etc. O que não está presente é o Cálculo. As idéias e as soluções dos problemas do Cálculo estão, como já afirmamos, submersas, escondidas, e os seus resultados são na maioria das vezes ensinados de forma camuflada: a área do círculo e a soma de uma progressão geométrica infinita tornam-se simplesmente fórmulas algébricas, a transformação das dízimas periódicas em frações é realizada por uma regra da aritmética etc.

Assim, para essa emersão e preparação do Cálculo no ensino básico, duas linhas diretrizes se constituem naturalmente: o problema da variabilidade e o problema da medida – que são, efetivamente, as questões fundamentais do Cálculo. Há de se ressaltar, entretanto, que no problema da medida existem propriamente dois problemas distintos e intrinsecamente relacionados: o processo geométrico da medida (procedimento de cálculo de áreas e volumes) e o processo aritmético da medida (o valor numérico da medida, o número real). Em (Rezende, 2003) são explicitados alguns dos conteúdos próprios de cada uma dessas linhas de inserção do Cálculo no ensino básico, bem como algumas sugestões de atividades didáticas de emersão de suas idéias e problemas construtores.

O lugar-matriz no ensino superior

A disciplina inicial de Cálculo, tal como está estruturada, se encontra, semanticamente, muito mais próxima da Análise do que do próprio Cálculo. Não é à toa que esta disciplina é considerada por um grande número de professores como uma pré-Análise, ou, mais especificamente, como uma abordagem "mais intuitiva" da Análise de Cauchy-Weierstrass em que se põe evidência nas técnicas de calcular limites, derivadas e integrais. Essa atitude predominante no ensino de Cálculo é caracterizada então por uma posição híbrida: por um lado, dá-se ênfase à organização e à justificação lógica dos resultados do Cálculo, e, por outro, realiza-se um treinamento exacerbado nas técnicas de integração, no cálculo de derivadas e de limites. Esta formatação analítica e algébrica da disciplina de Cálculo no ensino superior é, sem dúvida, uma das principais fontes da crise de identidade que mencionamos no início desta conclusão.

Assim, diante dessa crise de identidade do ensino de Cálculo, faz-se urgente redimensionar o paradigma de ensino de Cálculo: nem a preparação para um ensino posterior de Análise e nem a "calculeira desenfreada" servem como meta para um curso inicial de Cálculo; precisa-se voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo, os seus significados, os seus problemas construtores e suas potencialidades. Tão importante quanto saber usar as regras de derivação e as técnicas de integração, é saber os seus significados, as suas múltiplas interpretações, sua utilidade em outros campos da matemática e em outras áreas do conhecimento.

Diante disso, é preciso "re-calibrar" a disciplina de Cálculo em relação ao par técnica/significado. Mas também é preciso "re-calibrar" a disciplina de Cálculo, conforme já foi dito no capítulo anterior desta tese, em relação ao par sistematização/construção. Isto é, em vez de se construir as resultados e conceitos do Cálculo no nível do conhecimento já sistematizado, deve-se ter em mente a construção das redes de significações das idéias básicas para, num momento posterior, buscar a sistematização dos elementos dessa rede. *Não são as idéias de velocidade e coeficiente angular, interpretações do conceito de derivada, mas, ao contrário, são elas, efetivamente, as idéias geradoras e construtoras do campo semântico da noção de derivada* - (Rezende, 2003, p.432).

Para superar esta crise é necessário rediscutir o papel do ensino de Cálculo no ensino superior. No entanto, conforme observamos em páginas anteriores neste artigo, o sucesso do ensino superior de Cálculo está condicionado a uma preparação das idéias básicas do Cálculo no ensino básico de matemática. Ao permitir o Cálculo participar efetivamente da tecedura do conhecimento matemático do ensino básico, acreditamos que as dificuldades de aprendizagem do ensino superior de Cálculo serão em grande parte superadas, tanto quanto as do próprio ensino de matemática, e perceber-se-á, conforme nos disse certa vez Edgard Allan Poe, que *É apenas por faltar algum degrau aqui e ali, por descuido, em nosso caminho para o Cálculo Diferencial [e Integral], que este último não é coisa tão simples quanto um soneto de Mr. Solomon Seesaw.*

Referências bibliográficas

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

CABRAL, T. C. B. *Contribuições da Psicanálise à Educação Matemática: A Lógica da Intervenção nos Processos de Aprendizagem*. Tese de Doutorado. São Paulo: USP, 1998.

CARAÇA, B. de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 9ª edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

MACHADO, N. J. *Epistemologia e Didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente.* São Paulo: Editora Cortez, 1995.

PETITOT, J. *Local/Global*. Enciclopédia Einaudi, vol. 4, Local/Global, p. 11-75. Lisboa: Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1985a.

REZENDE, W. M. *Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite.* Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: IEM-USU, 1994.

REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003.

RÜTHING, D. *Some Definitions of the Concept of Function from J. Bernoulli to N. Bourbaki*. The Mathematical Intelligencer, vol. 6, nº 4, 1984.

SIERPINSKA, A. *Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits.* Educational Studies in Mathematics, 18, 1987.

SILVEIRA, J. P. *Cálculo Infinitesimal.* Web-page http: www.mat.ufrgs.br/~portosil/calculo.html, 1999.

TALL, D. e VINNER, S. *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, p. 151-169. 1976.