

15. O discreto e o contínuo no ensino de Matemática

Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura

Introdução

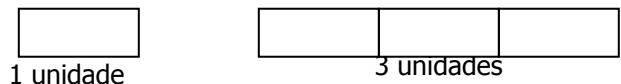
Uma das formas de classificarmos as diversas áreas do conhecimento matemático poderia ser descrita como temas de matemática discreta e temas de matemática contínua. Para exemplificar o primeiro caso podemos citar alguns tópicos como o estudo da análise combinatória e da contagem, dentre outros. Já à matemática contínua cabe o estudo dos gráficos, das funções, da geometria, das medidas.

Na escola básica, a matemática contínua é a grande soberana. Ela domina praticamente toda a escolaridade, deixando poucos momentos para o estudo da matemática discreta. Dentre estes momentos, temos um de fundamental importância: a construção da idéia de número. A introdução deste conceito é iniciada, na maior parte das escolas, pela via do discreto. Logo no início do 1º ciclo do ensino fundamental, as crianças aprendem a idéia de número. Ensina-se tal conceito utilizando-se o processo da contagem, das relações entre conjuntos de objetos, atualmente fundamentando-se nos estudos de Constance Kamii. Porém Euclides Roxo, na 6ª edição de seu livro "Lições de Arithmetica", que data de 1928, constrói a idéia de número natural a partir da contagem, do discreto, sem fazer nenhuma referência à possibilidade de utilização da idéia de medida para tal construção. A noção de medida surge apenas no momento em que o autor inicia a construção do conjunto das frações.

Em seu livro "A criança e o número", Kamii justifica sua metodologia para a construção da idéia de número pela via da contagem, apresentando uma série de experimentos realizados com crianças de diferentes faixas etárias, segundo os resultados das pesquisas desenvolvidas por Jean Piaget, o grande referencial teórico da referida autora e afirma:

O número envolve a quantificação de objetos discretos e, portanto, não pode ser ensinado através da extensão, que é uma quantidade contínua. (Kamii, p.59)

Por outro lado, outras experiências na área educacional sugerem a construção da idéia de número segundo a utilização da medida, do processo contínuo. Para exemplificar, podemos citar as barras de Cuisineire, que relacionam comprimentos à unidades. Vejamos:



Ou seja, uma barra de 1 cm corresponde a uma unidade; já a barra de 3 cm corresponde a 3 unidades, ou seja, ao triplo da primeira.

A discussão entre medida e contagem é bastante pertinente, principalmente se levarmos em consideração que *medir e contar são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com mais freqüência. (Caraça, p.29)*. Assim, precisamos sempre ter em mente a necessidade da abordagem dos temas focando tanto um aspecto quanto o outro, construindo um conhecimento mais relacionado e fundamentado.

Um outro exemplo, também na perspectiva da continuidade, foi o trabalho desenvolvido pelo psicólogo russo A. Petrovski. Ele verificou que também na antiga URSS, iniciava-se o ensino dos números naturais para depois relacioná-los como sendo a expressão de uma medida. Sua equipe passou a questionar se não seria mais relevante primeiramente compreender o conceito geral de medida, para depois passar ao estudo de como expressá-la. Para isso, foi necessário explicar para os alunos o que era o comprimento de um objeto, o peso, mostrar as inter-relações entre as diversas medidas. Segundo ele constatou, é muito mais simples para a criança estabelecer relações de desigualdade (maior, menor) do que de igualdade.

Las investigaciones mostraron que los símbolos literales, las fórmulas que fijan las propiedades básicas de las magnitudes son plenamente accesibles a los escolares de primer grado aún antes de que conozcan los números. (Petrovski, p. 20).

Temos aqui um argumento favorável ao ensino da idéia de número pela via do contínuo para em seguida passarmos à construção do número. Isso se dá através da comparação entre duas grandezas, quando a criança é capaz de expressar, por exemplo, que determinada grandeza é duas vezes maior que a outra. Então, a construção do número acontece a partir de relações tais como o dobro de, o triplo de, e assim por diante.

Há alguns anos trabalhando na escola básica, pude perceber como a abordagem do binômio discreto/contínuo varia ao longo da escolaridade. Quando a criança começa a construir a idéia de número, há um grande predomínio da matemática discreta sobre a matemática contínua. Um tempo se passa e a situação se reverte. A continuidade toma conta dos currículos, e o raciocínio discreto praticamente desaparece. É importante ressaltar que tanto a matemática discreta, quanto a matemática contínua, são fundamentais para a construção do pensamento matemático, e é isso que tentaremos mostrar ao final deste trabalho. O problema que vamos estudar refere-se à construção da idéia de número, compreendendo a via discreta, analisando o modelo contínuo e buscando propostas que visem restabelecer o equilíbrio entre tais abordagens.

Nossa intenção não é defender ou criticar nenhuma das abordagens descritas, mas mostrar que ambas são válidas e de extrema importância na construção da idéia de número. Desejamos enfatizar a relação de complementaridade do par discreto/contínuo e a necessidade de se trabalhar o binômio ao longo de toda a escola básica, sem o predomínio de um conceito sobre o outro.

Logo nas primeiras páginas da *Arithmetica progressiva*, um clássico sobre o estudo da ciência dos números, publicado no final do século XIX, Antonio Trajano nos coloca diante da idéia de número como o que exprime quantas unidades contém uma quantidade. No que se refere às quantidades, segundo o autor, estas podem ser contínuas (como por exemplo, "uma barra de ferro") ou descontínuas, o que atualmente entendemos por discretas (como por exemplo, "uma porção de laranjas"). Assim, temos no trabalho que estamos apresentando um resgate desta idéia: trabalhar o conceito de número como o resultado de uma contagem ou como expressão de uma medida.

Compreender o discreto e o contínuo não é uma tarefa fácil. Para ilustrarmos esse binômio destacaremos mais alguns exemplos no campo da matemática e também além dela. Como um primeiro exemplo, colocaremos as origens do cálculo diferencial e integral. Ao mesmo tempo, Leibniz e Newton construíram teorias bastante próximas nos seus fins, porém com desenvolvimentos e procedimentos bastante distintos. Enquanto Newton definia taxa de

variação e pensava em quantidades variáveis continuamente, tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias, dentre outras, Leibniz introduzia a idéia dos infinitésimos discretos e dos diferenciais. Ou seja, enquanto um propunha uma construção contínua, outro pensava na discretização das curvas, nos pequenos degraus. Duas idéias que não se anulam, muito pelo contrário, se complementam.

Dentro ainda do campo da matemática, um outro exemplo bastante útil para mostrar a complementaridade dos conceitos discreto/contínuo, é o da definição de números irracionais. No final do século XIX, Ricardo Dedekind propõe um corte na reta real, e utilizando-se da continuidade da reta, separa os números racionais dos irracionais. Um outro modo de categorizarmos os números irracionais se faz por aproximações infinitas, aumentando-se o número de casas decimais. Mais uma vez, contínuo e discreto não se excluem. Juntos, nos trazem uma maior clareza sobre determinados tópicos, ampliam nosso olhar oferecendo-nos uma maior compreensão sobre os números.

Levando esta questão para fora da matemática, podemos olhar para o par analógico/digital como uma ramificação do par proposto acima. Diz-se que o sistema digital é a tentativa de discretizar um sistema analógico. A eficiência de tal sistema pode ser medida considerando-se sua capacidade de simular o analógico. Praticamente todos os sistemas discretos possuem na sua saída, decodificadores, conversores, *modems*, enfim, equipamentos necessários para que o sinal analógico possa ser recuperado. Estas idéias estão intimamente relacionadas ao binômio contínuo/discreto. Muito freqüentemente associa-se ao sistema digital o discreto e ao sistema analógico, o contínuo. É como vimos acima, é de extrema importância que exista o diálogo entre os dois sistemas para a compreensão da informação (som, música, dados, voz, dentre outros). O *long-play* (LP) e o *compact disc* (CD) são exemplos, respectivamente, das tecnologias analógica e digital.

A evolução histórica do conceito de número

A necessidade de contar e de fazer cálculos matemáticos esteve sempre acompanhada de uma evolução social e, se assim podemos dizer, econômica das sociedades humanas. A partir do momento em que os nossos ancestrais, além de cuidar da agricultura, partiram para fazer trocas e mais adiante, comercializar seus produtos, os primeiros números surgiram, naturalmente, como conseqüência deste processo.

Surgiam, então, o que chamamos hoje números naturais, originados não apenas por um exercício intelectual dos homens, mas extremamente associados às suas necessidades diárias. Segundo Costa,

O número natural nasceu da necessidade de se compararem umas às outras as grandezas discretas. (pág. 217)

Muitos séculos se passaram, até chegarmos à Grécia antiga e à escola pitagórica. É neste momento que os números deixam apenas de servir às contagens e passam a assumir um caráter abstrato, por vezes místico e esotérico, em que as leis matemáticas traduziam a harmonia universal, construindo os alicerces da moderna teoria dos números. Acreditavam ser possível uma *ordenação matemática do Cosmos* (Caraça, 2002).

Com a evolução das relações sociais, a humanidade passou a ter não só a necessidade de contar, mas também a de medir. O sistema de produção baseava-se na agricultura, e assim era preciso medir comprimentos e áreas de terrenos, além de determinar o tempo para o plantio, para a colheita dentre outras necessidades cotidianas. Entendemos aqui medir, como o

ato de comparar duas grandezas, uma sendo referência para a determinação da outra. Ressaltamos que a questão da medida está intimamente ligada ao modo contínuo de construção da noção de número. Esta comparação pode ser feita utilizando padrões como: *a é maior que b* ou *a é menor que b*. Porém, pode-se querer ir mais além e perguntar: quantas vezes o padrão escolhido cabe dentro da grandeza a ser medida? Estamos nos referindo então a como expressar o resultado desta comparação.

Acontece, porém, que a relação entre a grandeza a ser medida e o padrão estabelecido pode resultar em um número inteiro ou não. Para expressarmos esta nova medida, o campo numérico dos números naturais já não é mais suficiente. Faz-se necessária a utilização de subdivisões, e para tal, apresentam-se os números fracionários.

Os egípcios utilizaram as frações, porém os registros mostram que não havia nenhuma formalização com relação às operações. Segundo Costa, os árabes trouxeram da Índia para o Ocidente o desenvolvimento do cálculo das frações. Isso se deu por volta do século VI da nossa era. Foi preciso cerca de 1000 anos para que as operações fundamentais realizadas com os números inteiros fossem desenvolvidas neste novo campo numérico. Elas aparecem na *Aritmética* de Stevin, em 1585. Os gregos também utilizavam as frações de modo bastante eficiente, mediam comprimentos e áreas. É atribuído a Pitágoras um teorema muito importante, que talvez já fosse conhecido pelos chineses alguns séculos antes, o qual nos diz que em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

E foi através deste caminho que eles se defrontaram com os números irracionais.

Ainda na Grécia, essa questão foi, ao que parece, voluntariamente esquecida, para ser retomada somente no final do século XIX, através dos estudos do matemático alemão Dedekind, com sua teoria da continuidade geométrica. Esse resultado foi apresentado no livro *Continuidade e números irracionais*.

Vejamos através de mais um exemplo, como o conjunto dos números racionais já não é mais suficiente nesta nossa caminhada sobre a identificação dos campos numéricos. Tomemos o conjunto dos números racionais e façamos um corte sobre ele, da seguinte maneira: em uma classe A coloquemos todo número racional r cujo quadrado seja menor que 2, ou seja $r^2 < 2$; em uma outra classe B, pomos todo número racional s cujo quadrado seja maior que 2, ou seja, $s^2 > 2$. Temos assim um corte? Vamos verificar que a resposta a esta pergunta é não! Por este critério são cobertos todos os números racionais, exceto aquele cujo quadrado é exatamente 2. Porém, como já nos referimos acima, este número não existe no conjunto dos números racionais. Assim, o elemento de separação entre as classes A e B efetivamente não existe. Concluimos então que o conjunto dos números racionais não é contínuo.

Coloquemos então a definição utilizada por Dedekind: chamemos número real ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais. Se existir um número racional separando estas duas classes, o número real coincide com esse racional; se não existe tal número, este será chamado irracional.

Grades curriculares e Parâmetros Curriculares Nacionais

Após essa breve introdução histórica, que tinha como objetivo central a compreensão da origem dos diferentes campos numéricos, vamos apresentar e comparar o que acontece na vida escolar do aluno.

Apresentaremos a seguir trechos dos planos escolares do 1^a ao 4^o anos do Ensino Fundamental da Escola de Aplicação da FEUSP, ano de 2003, contendo apenas os conteúdos conceituais e procedimentais referentes à construção da noção de número e quanto às idéias sobre medidas. Em seguida, buscaremos nos Parâmetros Curriculares Nacionais referências no tratamento do tema deste trabalho, visando mais uma vez, compreender e justificar a relevância do que está proposto.

1^o Ciclo do Ensino Fundamental - 1^o ao 4^o ano

1 ^o ANO	2 ^o ANO
<p><i>Números decimais</i> Regra de formação de uma seqüência Leitura e escrita dos números naturais de 0 a 100 Antecessores e sucessores de qualquer número entre 0 a 100 Regras do SND (unidades, dezenas e centenas) Ordem crescente e decrescente Valor posicional dos números Troca de unidades por dezenas e centenas com o material concreto</p>	<p>Números decimais, história de numeração Classe das unidades simples e unidades de milhar Sistema Monetário brasileiro Sistema de Numeração Decimal Números até 9.999 Valor posicional Ordinais até 50 Par e ímpar Sistema de numeração romana até 1000.</p>
<p><i>Operação com números naturais</i> Adição simples e com reserva Subtração simples Problema sem operação e com uma operação Estratégias individuais de cálculo mental Noções de multiplicação</p>	<p>Operações com números naturais Adição e subtração: nomenclatura e prova real Subtração com reserva Multiplicação com um algarismo no multiplicador Multiplicação com e sem recurso Tabuadas de multiplicação de 1 a 10</p>
<p><i>Grandezas e medidas</i> Medidas de tempo: semana, mês e ano</p>	<p>Grandezas e medidas Unidades de tempo: hora, minuto e segundo</p>

3 ^o ANO	4 ^o ANO
<p><i>Números decimais, história da numeração</i> Sistema de numeração decimal: números até a classe dos milhões - Leitura e escrita - Comparação e ordenação - Valor absoluto e valor relativo - Ampliação dos números ordinais até milhares</p>	<p>Sistema de Numeração Decimal - Ampliação da numeração até a classe dos trilhões Classes e ordens Valor absoluto e valor relativo Números ordinais e romanos Números Racionais Absolutos Frações - a partir de explorações com material concreto</p>

<p>História da numeração: Sistemas de numeração Egípcio e Romano</p>	<p>Conceitos de metade, terça parte, quarta parte Generalização do conceito de frações Frações equivalentes Frações decimais :conceito Decimais : representação decimal de um número racional Comparação de números racionais na forma decimal</p>
<p>Operação com números naturais Multiplicação: dois ou mais algarismos no multiplicador Divisão através de agrupamentos e do processo longo Multiplicação e divisão: nomenclatura e prova real Expressões numéricas envolvendo as quatro operações fundamentais Cálculo Mental : estimativa <i>Problemas sem operações e problemas envolvendo o conteúdo do ano</i></p>	<p>Operação com números naturais e racionais Expressões numéricas com números inteiros; com todos os sinais de associação; Cálculo mental; Adição, subtração e multiplicação de frações decimais Adição e subtração de frações com base no conceito de equivalência; Multiplicação de um número natural por um número fracionário Divisão de dois números naturais quaisquer e justificativa do aparecimento da vírgula no quociente e as transformações sucessivas nos restos obtidos; Adição e subtração de números racionais na forma decimal; Problemas sem operação e problemas envolvendo o conteúdo do ano</p>
<p>Grandezas e Medidas <u>História das medidas</u> Medidas de tempo (bimestre, trimestre, década, século, milênio) e de comprimento (milímetro e quilômetro)</p>	<p>Unidades de Medidas Medidas de comprimento com unidade padronizada - metro, centímetro - uso de régua Medidas de tempo - unidades, comparação entre elas</p>

Com relação às medidas, o que se trabalha inicialmente são as medidas de tempo, que trazem implicitamente a idéia da continuidade, mas que não são utilizadas como uma segunda abordagem na idéia de número. No 3º ano EF inicia-se o estudo das medidas de comprimento, ensinando-se apenas o quilômetro e o milímetro e no 4º ano, estuda-se o metro e o centímetro, assim como o uso da régua. A questão da medida está assim bastante deslocada

da construção do número natural. Percebemos que as primeiras grandezas estudadas referem-se às medidas de tempo, enquanto que as relacionadas a massa e volume não são trabalhadas até o 4º ano do Ensino Fundamental.

Através dos tópicos descritos no plano do 1º ano EF, é possível visualizar a construção do número pela via do discreto. Vejamos: regra de formação de uma seqüência; leitura e escrita dos números naturais de 0 a 100; antecessores e sucessores de qualquer número entre 0 a 100 nos remetem à idéia de contagem através das relações entre objeto e conjunto, como sugere Kamii. No 4º ano, surgem as frações, a partir da exploração de material concreto. Neste contexto é a idéia de medida que está sendo utilizada.

Consultando os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, retiramos alguns conteúdos conceituais e procedimentais para o 1º ciclo do Ensino Fundamental, inseridos no tema Números naturais e Sistema de numeração decimal:

- *Reconhecimento de números no contexto diário;*
- *Utilização de diferentes estratégias para quantificar elementos de uma coleção: contagem, pareamento, estimativa e correspondência de agrupamentos;*
- *Utilização de diferentes estratégias para identificar números em situações que envolvem contagens e medidas;*
- *Comparação e ordenação de coleções pela quantidade de elementos e ordenação de grandezas pelo aspecto da medida.*

A abordagem proposta pelos PCN para a construção da idéia de número vem de encontro ao que estamos propondo neste trabalho: que a esta construção se dê seguindo os passos do discreto e do contínuo, alternadamente, permitindo ao aluno a compreensão de número como expressão de uma contagem ou de uma medida.

Reflexão sobre ordens possíveis para a abordagem

Pelo que foi apresentado até este momento é possível estabelecer três possíveis ordens para a construção da idéia de número. A primeira delas é através do uso do discreto e mais adiante a inserção do contínuo. Na segunda, temos desenhado o caminho contrário, iniciando-se a abordagem pela via do contínuo e em seguida, passando ao discreto. E a última abordagem traz a construção da idéia de número fundamentada nos dois conceitos, simultaneamente.

A primeira abordagem está claramente colocada em nos trabalhos de diversos autores, como por exemplo, Constance Kamii e de Euclides Roxo e é a abordagem mais difundida nas escolas de Ensino Fundamental e Médio. Nesta proposta, o currículo é desenhado partindo-se do discreto, da relação entre conjuntos, da contagem, e progressivamente chega-se à idéia da medida, da continuidade. A partir daí, a ênfase curricular se dá no contínuo. Surge o desequilíbrio e os problemas decorrentes da proposta.

A segunda abordagem surge quase como uma curiosidade, e seu único representante é o psicólogo russo Petrovski. Ele defende que para as crianças é muito mais fácil estabelecer relações do tipo *é maior que* ou *é menor que* do que *é igual que*. Ou seja, ao comparar a quantidade de areia colocada em dois montes, é muito mais difícil estabelecer a relação de igualdade entre os montes do que verificar a desigualdade. Feito isto, a criança passa então a fazer comparações, determinando se uma grandeza é duas vezes maior (ou menor) que a outra, ou três vezes maior, e assim sucessivamente. A partir da medida chega-se à contagem.

proposta deste trabalho vem ao encontro com uma terceira abordagem feita por renomados estudiosos do início do século XX, como Antonio Trajano e o irmão Isidoro Dumont, que estabelecem o número como resultado da medição de grandezas, que podem ser discretas ou contínuas. No caso das grandezas discretas a medida se faz através da contagem e no caso das contínuas, através da comparação em relação a um determinado padrão.

Referências Bibliográficas

- BETTI, Renato. *Analogico/digital*. In Enciclopédia EINAUDI. Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1996.
- BOYER, Carl. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974, 11ª ed.
- CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Gradiva, 2002, 4ª ed.
- COSTA, Manoel Amoroso. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. São Paulo: Convívio, 1981, 3ª ed.
- COURANT, Richard & ROBBINS, Herbert. *O que é matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000, 4ª ed.
- DUMONT, irmão Isidoro. *Elementos de aritmética - curso médio*. Coleção de livros didáticos - F.T.D. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1948.
- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos - tomo I - a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo*.
- KAMII, Constance. *A criança e o número*. Trad. Regina A. de Assis. Campinas: Papyrus, 1990, 28ª ed.
- MINSKY, Marvin. *The society of mind*. New York: Simon & Schuster, 1988.
- PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. *Matemática*. Volume 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- PETROVSKI, A. *Psicologia evolutiva y pedagógica*. Trad. Leonor Salinas. Moscou: Editorial Progreso Moscú, 1979, 2ª ed.
- PIAGET, Jean e SZEMINSKA, Alina. *A gênese do número na criança*. Trad. Christiano Monteiro Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1971.
- ROXO, Euclides. *Lições de arithmetica*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1928, 6ª ed.
- TRAJANO, Antonio. *Arithmetica progressiva*. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1928, 63ª ed.