Obstáculo Epistemológicos na Álgebra

Cláudio Saiani

Seminários de Epistemologia e Didática

FEUSP

Coord. Nílson José Machado

A suspeita

- Joãozinho e Zezinho possuem juntos 35 figurinhas, mas Joãozinho tem 5 figurinhas a mais do que Zezinho. Quantas figurinhas cada um possui?

D´Amore (1999)

- Um obstáculo é uma idéia que, no momento da formação do conceito, foi eficaz para enfrentar os problemas anteriores, mas que se revela um fracasso quando se tenta aplicá-la a um novo problema. Dado o êxito obtido tende-se a conservar a ideia já adquirida e comprovada e, apesar do fracasso, busca-se salvá-la; mas esse fato acaba sendo uma barreira para o aprendizado.

Gaston Bachelard (1938)

- Obstáculos epistemológicos nas Ciências da Natureza.
- Não existiriam na História da Matemática.

Serpienska (relendo Bachelard)

- Critérios
  - Preconceito.
  - Falta de questionamento
  - Não exigência de validação.
- Opiniões
- Conhecimento degenerado em hábito.
- Concretização de objetos abstratos

Obstáculos epistemológicos na Educação Matemática

- Um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, aquele do qual não se pode escapar e que se pode em princípio encontrar na história do conceito (Igliori, p. 97)
- Análise histórica + dificuldades dos alunos.

Brousseau (1973)

- Obstáculo ligado à resistência de um saber mal adaptado.
- Meio de interpretar erros recorrentes e não aleatórios, cometidos pelos estudantes.
- Erros ligados a uma maneira de conhecer, a um conhecimento antigo que teve sucesso em todo um domínio.
- Não necessariamente explicitáveis.

Brousseau

- Origem ontogênica: limitações de ordem neurofisiológica do sujeito.
- Origem didática: dependentes da escolha de um sistema didático.
- Ordem epistemológica: constitutivos do conhecimento visado, e dos quais não se pode nem se deve escapar.

Artigue (1990)

- O que fundamenta ... o obstáculo epistemológico é mais a aparição e a resistência na história de certos conceitos, bem como a observação de concepções análogas entre os alunos, do que a constatação da resistência a estes conceitos entre os estudantes da atualidade.

Artigue (1990)

- Processos produtivos de obstáculos epistemológicos em Matemática:
  - Generalização abusiva: dos naturais para os decimais.
  - Regularização formal abusiva:
    - $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

O caso da Álgebra (Smith, 1958)

- Significado do termo álgebra:
  - Qualquer problema que hoje seria passível de ser resolvido por métodos algébricos, mesmo se originalmente ele tenha sido resolvido por adivinhação ou por algum complicados método aritmético
  - ~ 1800 aC;

Um probleminha ...

- Adicionando-se um número ao seu sétimo, obtemos 19. Que número é esse?
- *Chamemos o número procurado de x ...*

O papiro Ahmes (1300 AC)

- “Regras para pesquisar a natureza, e para conhecer tudo o que existe”.

Um problema de 4000 anos

- “Hau, seu inteiro, seu sétimo, fazem dezenove
- Hau: palavra usada para representar uma quantidade desconhecida.
- Método da falsa posição.

Grounde of Artes (séc. XVI)
Robert Recorde (Inglaterra)

- A regra da falsa posição:
  - *Gesse at this woorke as happe doth lead.*
    By chance to truth you may procede.
    And firste woorke by the question,
    Although no truthe therein be don.
    Suche falsehood is so good a grounde,
    That truth by it will soone be founde.

Os três estágios do desenvolvimento da Álgebra

- (1) Retórico: Problemas da "Ciência dos Números", restrita a poucos. Resolução escrita como uma peça de prosa ou argumento filosófico.
- (2) Sincopado: Soluções ainda escritas como uma peça de prosa, mas com abreviações para certas palavras e a introdução de certos símbolos (~275 DC até o séc. XVI).

Os três estágios do desenvolvimento da Álgebra

- (3) Simbólico:
  - Não são usadas palavras ou abreviações para resolver problemas.
  - Os enunciados são substituídos por uma escrita simbólica, que fornece uma espécie de “máquina” que resolve o problema praticamente sozinha.

Euclides (séc. IV AC)

- "Álgebra elementar" tratada geometricamente.
  - $a(b+c) = ab + ac$
  - $(a+b)^2=a^2 + b^2 + 2ac$
  - Solução da equação $x^2 = ab$

Diofanto de Alexandria (250 AD)

- *Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isso, cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança tardia; depois de chegar à medida de metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou a sua vida (Antologia Grega, 500 AD).*

Diofanto de Alexandria (250 AD)

- Quantidade desconhecida: *arithmos*
- Diofanto usava um símbolo parecido com a letra ς
- ς vezes ς : Δ^{γ}
- ς vezes ς vezes ς: K^{γ}

Antologia Grega (500 AD)

- Um terço de um número de maçãs é dado a um homem, um oitavo a um segundo homem, um quarto a um terceiro homem, um quinto a um quarto homem; um quinto homem fica com 10 maçãs, e um sexto homem fica só com uma. Quantas maçãs são necessárias?

Tartaglia: $x^3 + px = q$ (1549)

Quando chel cubo con le cose appresso
Se aqquaglia ´a qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto
Che"llor productto sempre sia equale
Alterzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottrati
Varra la tua cosa principale.
In el secondo de cotestiatti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osseruarai quest'altri contratti,
Del numer farai due tal part'` a uolo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo
Delle qual poi, per communprecetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal somma sara il tuo concetto.
El terzo poi de questi nostri conti
Se solue col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trouai, non con passi tardi
Nel mille cinquecent`e, quatroe trenta
Con fondamenti ben sald'` e gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.

Tartaglia: $x^3 + px = q$ (1549)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} + \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

Sumario Compendioso (Juan Diez. México, 1556)

- *Ache um número do qual se* $15\frac{3}{4}$ *for subtraído o resultado é sua própria raiz.*
- Seja o número *cosa* [x]. O quadrado de meia cosa é igual a ¼ de um *zenso* [x^2]. Somando 15 e ¾ a ¼ temos 16, cuja raiz é 4, e isso mais ½ é a raiz do referido número.
- *Prova*: Quadre a raiz quadrada de 16 mais meia *cosa*, que é quatro e meio, dando 20 e ¼, que é o número quadrado requerido. De 20 ¼ subtraia 15 e ¾ e você terá 4 e ½, que é a raiz do próprio número.

Sumario Compendioso (Juan Diez. México, 1556)

- Um homem embarca num navio e pergunta ao mestre quanto deve pagar. O mestre diz que não será mais que nenhum outro passageiro. O homem pergunta de novo quanto será. O mestre replica: "Será o número de pesos que, multiplicado por si mesmo e somado ao número, dá 1260." Pede-se que se descubra quanto o mestre pediu.
- $[x^2 + x = 1260]$

Sumario Compendioso (Juan Diez. México, 1556)

- Seja o custo uma *cosa* [x] de pesos. Então, metade de uma cosa ao quadrado faz ¼ de um *zenso* [x^2], e isso somado a 1260 faz 1260 e um quarto, cuja raiz menos ½ de uma *cosa* é o número pedido. Reduza 1260 e ¼ a quartos; isso é igual a $\frac{5041}{4}$, cuja raiz é $\frac{71}{2}$, subtraia disso meia cosa, e ficam 70 meios, que é igual a 35 pesos, e isso é o que foi pedido pela passagem.
- Prova: Multiplique 35 por si mesmo e terá 1225; somando isso a 35, você terá 1260, que é o número pedido.

Desenvolvimento do simbolismo algébrico

- Pacioli (1494): primeira obra impressa contendo álgebra

  Trouame .1. n$^{o.}$ che gioto al suo qdrt^{o} facia .12

  $[x + x^2 = 12]$

Desenvolvimento do simbolismo algébrico

- “Em suas soluções, mas não em seus problemas, ele usava .co. (*cosa*, coisa) para x; .ce. (*census* ou *zensus*; em italiano, *censo*, avaliação das riquezas, taxa) para x^2; .cu. (*cubus*), para x^3; .ce.ce. para x^4 e .pº.rº. (*primo relato*) para x^5” (Smith, p. 427).

Desenvolvimento do simbolismo algébrico

- Ghaligai (1521)

1 □ e 32 c° — 320 numeri.

[$x^2 + 32x = 320$]

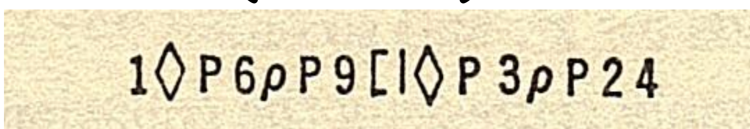
- Cardano (1545)

cub' p: reb' aqlis 20.

[$x^2 + 6x = 20$]

Desenvolvimento do simbolismo algébrico

- Buteo (1559)



$$[x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24]$$

- Bombelli (1572)

$$[x^6 + 8x^3 = 20]$$

Desenvolvimento do simbolismo algébrico

- Viéte (1590):

  I QC — 15 QQ + 85 C —225Q + 274 N aequatur I20.

  $$[x^6 - 15\,x^4 + 85\,x^3 - 225\,x^2 = 120]$$

Desenvolvimento do simbolismo algébrico

- Girard (1629):

  1 (4) + 35 (2) + 24 = 10

  $[x^4 + 35x^2 + 24 = 10]$

- Wallis (1693):

  $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

Desenvolvimento do simbolismo algébrico

- Joãozinho e Zezinho possuem juntos 35 figurinhas, mas Joãozinho tem 5 figurinhas a mais do que Zezinho. Quantas figurinhas cada um possui?

Desenvolvimento do simbolismo algébrico

- Estágio simbólico:

Seja x a quantidade de figurinhas de Zezinho.

Logo, Joãozinho tem x + 5 figurinhas.

$$x + x + 5 = 35$$

$$2x = 30$$

$$x = 15$$

R: Zezinho tem 15 figurinhas e Joãozinho tem 20.

Desenvolvimento do simbolismo algébrico

- Estágio retórico:

Se eu tirar 5 figurinhas, cada um vai ter a mesma quantidade, 15, que é 30 dividido por 2. Aí, eu dou as 5 que eu tirei para o Joãozinho. Ele fica com 20, e Zezinho com 15.