Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação 2º semestre de 2009

Seminários de Estudos em Epistemologia e Didática (SEED)

Tema:

Eleições: os limites fixados pelo Teorema de Arrow

Resp.: Nílson José Machado

... Têm o hábito (os persas) de deliberar sobre os negócios mais sérios depois de beberem muito; mas, no dia seguinte, o dono da casa onde estiverem reunidos traz novamente à baila a questão, antes de começarem a beber de novo. Se aprovam, ela passa; se não, abandonam o assunto. Às vezes, entretanto, dá-se o contrário: o que decidiram antes de beber passam a discutir novamente durante a embriaguez.

Heródoto (484-425 aC, Livro I Clio CXXXIII)

Resumo

Diz-se que "a democracia é o pior dos regimes, excetuando-se todos os outros". As eleições são a marca da democracia. Os eleitores votam em um candidato, de um elenco X, Y, Z... Na escolha do vencedor, diversos critérios podem ser acordados. Um critério "justo" é transitivo: se preferimos X a Y e Y a Z, então preferimos X a Z. Três outras características são desejáveis: a) se todos os eleitores votam em X, então X é eleito (unanimidade); b) a decisão sobre o eleito não decorre exclusivamente do voto de um eleitor D (ausência de ditadura); c) todos os eleitores são capazes de ordenar os candidatos segundo sua preferência, e este ordenamento não é alterado se um candidato (não o preferido) é eliminado (independência das alternativas irrelevantes).

Kenneth Arrow (Nobel de Economia/1972) demonstrou, em 1951, o seguinte teorema: **Numa eleição com três ou mais candidatos, não existe critério eleitoral que satisfaça simultaneamente as condições a), b) e c); e somente a ditadura satisfaz as condições a) e c).**

O Teorema da Impossibilidade (Arrow) é tão intrigante quanto o Teorema da Indecidibilidade (Gödel) ou o Princípio da Incerteza (Heisenberg). Analisar seu significado é o objetivo do presente seminário.

ANEXOS

I – PARADOXO DE CONDORCET (1743-1794)

Três amigos A, B e C escolhem uma pizza, em um cardápio com três tipos de pizza: x, y e z. As escolhas ordenadas são as seguintes:

A	B	C
x	y	z
y	z	x
z	x	y

Qual a pizza a ser escolhida?

$x > y, \quad y > z, \quad z > x$

Dificuldade: Intransitividade, Maioria cíclica

II – ORDENAÇÃO POR PARES
(INDEPENDÊNCIA DAS ALTERNATIVAS IRRELEVANTES)

Treze indivíduos escolhem uma pizza entre três possíveis: x, y, e z

votantes → ordem ↓	6	3	4
1	x	y	z
2	y	z	x
3	z	x	y

x é a mais votada

Garçon avisa: a pizza y não está disponível (irrelevante!)

votantes → ordem ↓	6	3	4
1	x	z	z
2	z	x	x

z passa a ser a mais votada...

III – SISTEMAS DE VOTAÇÃO (FUNÇÕES DE BEM ESTAR SOCIAL)

1. **MAIORIA**

   O vencedor será o candidato que tiver a maioria absoluta (50% + 1) dos votos.

2. **PLURALIDADE**

   O vencedor será o candidato que tiver a maioria simples dos votos.

3. **PONDERAÇÃO**

   Se o número de candidatos é igual a k, então, em cada voto, o primeiro lugar em cada ordenação tem k – 1 pontos, o segundo, k – 2 pontos, ... o último, zero pontos; o vencedor será o candidato com o maior total de pontos. (Excetuando a diferença na pontuação, é o critério adotado na Fórmula 1.)

4. **CONFRONTO DIRETO**

   Se um candidato ganhar o confronto direto com todos os outros, então ele será o vencedor.

5. **ELIMINAÇÃO/PRIMEIRO***

   Após a votação/ordenação inicial, elimina-se o candidato com o menor número de 1ºs lugares, e reordenam-se os votos. Após a reordenação, elimina-se o candidato com o menor número de 1ºs lugares; e assim por diante, até o último sobrevivente, que será o vencedor.

   *(Segundo Hodge e Klima, vale na Austrália, na Irlanda e na prefeitura de Londres)

6. **ELIMINAÇÃO/ÚLTIMO**

   Após a votação/ordenação inicial, elimina-se o candidato com o maior número de última colocação (mais rejeitado), e reordenam-se os votos. Após a reordenação, elimina-se o candidato mais rejeitado, e assim por diante, até o último sobrevivente, que será o vencedor.

EXEMPLO 1 (resposta no final)

Candidatos: A, B, C, D 35 eleitores

votantes → ordem ↓	12	9	8	6
1	A	B	C	D
2	D	C	B	B
3	C	D	D	C
4	B	A	A	A

SISTEMA DE VOTAÇÃO VENCEDOR

REGRA DA MAIORIA

PLURALIDADE

PONDERAÇÃO

CONFRONTO DIRETO

ELIMINAÇÃO/PRIMEIRO

ELIMINAÇÃO/REJEIÇÃO

---

votantes → ordem ↓	12	9	8	6
1				
2				
3				

votantes → ordem ↓	12	9	8	6
1				
2				

votantes → ordem ↓	12	9	8	6
1				
2				
3				

votantes → ordem ↓	12	9	8	6
1				
2				

EXEMPLO 2 (resposta no final)

Candidatos: A, B, C, D, E **52 eleitores**

votantes → ordem ↓	12	9	8	10	13
1	A	B	C	D	E
2	C	C	B	B	A
3	D	D	A	A	D
4	B	A	D	C	C
5	E	E	E	E	B

REGRA... **VENCEDOR**

1. **MAIORIA**
2. **PLURALIDADE**
3. **PONDERAÇÃO**
4. **CONFRONTO DIRETO**
5. **ELIMINAÇÃO/PRIMEIRO**
6. **ELIMINAÇÃO/REJEIÇÃO**

votantes → ordem ↓	12	9	8	10	13
1					
2					
3					
4					

votantes → ordem ↓	12	9	8	10	13
1					
2					
3					

votantes → ordem ↓	12	9	8	10	13
1					
2					

votantes → ordem ↓	12	9	8	10	13
1					
2					
3					
4					

votantes → ordem ↓	12	9	8	10	13
1					
2					
3					

votantes → ordem ↓	12	9	8	10	13
1					
2					

IV – CONDIÇÕES DE ARROW PARA UM SISTEMA DE VOTAÇÃO JUSTO (FUNÇÃO DE BEM ESTAR SOCIAL)

Candidatos A, B, C, D,... **Eleitores 1, 2, 3, ... j, ... n**

(A é preferível a B representa-se por A > B...)

1) **Anonimidade**

   Um sistema de votação é anônimo se trata todos os eleitores igualmente; se quaisquer dois eleitores trocarem os votos entre si, o resultado da eleição não será alterado.

2) **Neutralidade**

   Um sistema de votação é neutro se trata todos os candidatos igualmente.

3) **Monotonicidade**

   Um sistema de votação é monotônico se é impossível a um candidato perder uma eleição em razão de um aumento no número de seus votos.

4) **Transitividade**

   Nas ordenações dos eleitores, se A > B e B > C, então A > C.

5) **Universalidade**

   Todas as ordenações dos candidatos são possíveis e aceitáveis (no caso, correspondem às permutações de ABCD...)

6) **Unanimidade**

   Se, para todos os eleitores, A > B, então, no resultado da eleição, A > B

7) **Não-ditadura**

   Não existe um eleitor j tal que, se A > B para j, então A > B no resultado da eleição, independentemente dos votos dos demais eleitores.

8) **Ordenação por pares (Independência das alternativas irrelevantes)**

   A ordenação coletiva de um par de candidatos deve depender apenas das ordenações individuais dos eleitores relativas aos referidos candidatos; um resultado A > B não deve ser alterado se um candidato diferente de A e B desistir de concorrer, por exemplo.

Condições assumidas para todos os sistemas eleitorais considerados racionais, e portanto, justos: 1), 2) 3) e 4)

Restam três exigências:

a) Unanimidade **b) Não-ditadura** **c) Ordenação por pares**

V – TEOREMA DE ARROW

Em uma eleição com apenas dois candidatos, a regra da maioria é um sistema de votação que satisfaz as exigências Unanimidade, Não-ditadura e Ordenação por pares.

Para mais de dois candidatos, a situação é mais complexa. Kenneth Arrow demonstrou, em sua tese de doutorado (1951), que

Em uma eleição com mais de dois candidatos, não existe critério eleitoral que satisfaça, simultaneamente, as exigências de Unanimidade, Não-ditadura e Ordenação por pares; o único sistema de votação que satisfaz simultaneamente a Unanimidade e a Ordenação por pares é a ditadura.

Respostas:

Exemplo 1.
Regra da maioria: ninguém
Pluralidade: A (com 12 pontos)
Ponderação: C (com 60 pontos)
Confronto direto: D
Eliminação/primeiro: B
Eliminação/rejeição: C

Exemplo 2.
Regra da maioria: ninguém
Pluralidade: E (com 13 pontos)
Ponderação: A (com 132 pontos)
Confronto direto: ninguém
Eliminação/primeiro: B
Eliminação/rejeição: A

Bibliografia

BUCHANAN, James M., TULLOCK, Gordon – *The Calculus of Consent – Logical Foundations of Constitucional Democracy*. Indianapolis: Liberty Fund Inc., 2004.

CANFORA, Luciano – *Crítica da Retórica Democrática*. São Paulo: Estação Liberdade, 2007.

DAHL, Robert A. – *Sobre a Democracia*. Brasília: Editora UnB, 2009.

EPSTEIN, Isaac – *O paradoxo de Condorcet e a crise da democracia representativa*. São Paulo: Estudos Avançados, V. 11, Nº 30 Maio-Agosto/1997.

HERÓDOTO – *História*. Rio de Janeiro: EDIOURO, s/d.

HODGE, Jonathan K., KLIMA, Richard E. – *The Mathematics of Voting and Elections: A Hands-On Approach*. Rhode Island/EUA: American Mathematical Society, 2005.

******SP/ago/09