

**SEED/FEUSP - São Paulo, 16 de maio de 2008**

# **Cálculo Diferencial e Integral: um tema para todos**

**Nílson Machado**

**Universidade de São Paulo**

# Idéias fundamentais do Cálculo: um tema para todos

- **Landa, L. N. - Cibernética y Pedagogia**

“...los alumnos salen de la escuela como los contemporáneos de Newton, cuando deberían hacerlo como los de Einstein.”

- **Poe, Edgard Allan – Eureka**

“É apenas por faltar algum degrau aqui e ali, por descuido, em nosso caminho para o Cálculo Diferencial, que este último não é coisa tão simples quanto um soneto...”

# Idéias fundamentais do Cálculo: um tema para todos

- Não se trata de introduzir novos conteúdos na Escola Básica, mas sim de reconhecer e explorar as idéias fundamentais do Cálculo que já se encontram presentes nos diversos conteúdos usualmente ensinados:
- Proporcionalidade, áreas de figuras planas com contornos variados, cálculo de médias de diferentes tipos, estudo do crescimento/decrescimento de funções, problemas de máximos e mínimos

## PERGUNTAS PARA TODOS:

- “É constante ou variável?”
- Cresce ou decresce? De que modo cresce ou decresce?”

# Idéias fundamentais do Cálculo: polarizações conceituais subjacentes

» **constante/variável**

» **discreto/contínuo**

» **exato/aproximado**

» **técnica/significado**

» **finito/infinito**

» **local/global**

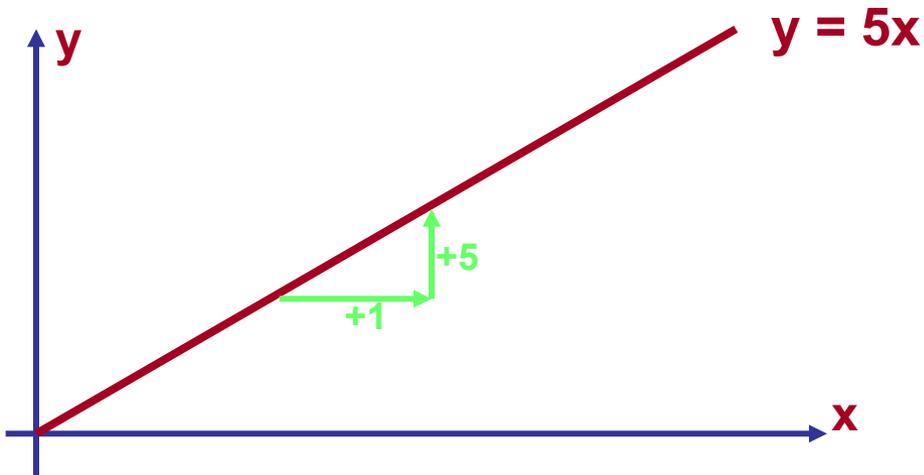
**TECNOLOGIA**  
como recurso  
para equilibrar  
polarizações

# Idéias fundamentais do Cálculo: da proporcionalidade à taxa de variação

## Grandezas diretamente proporcionais

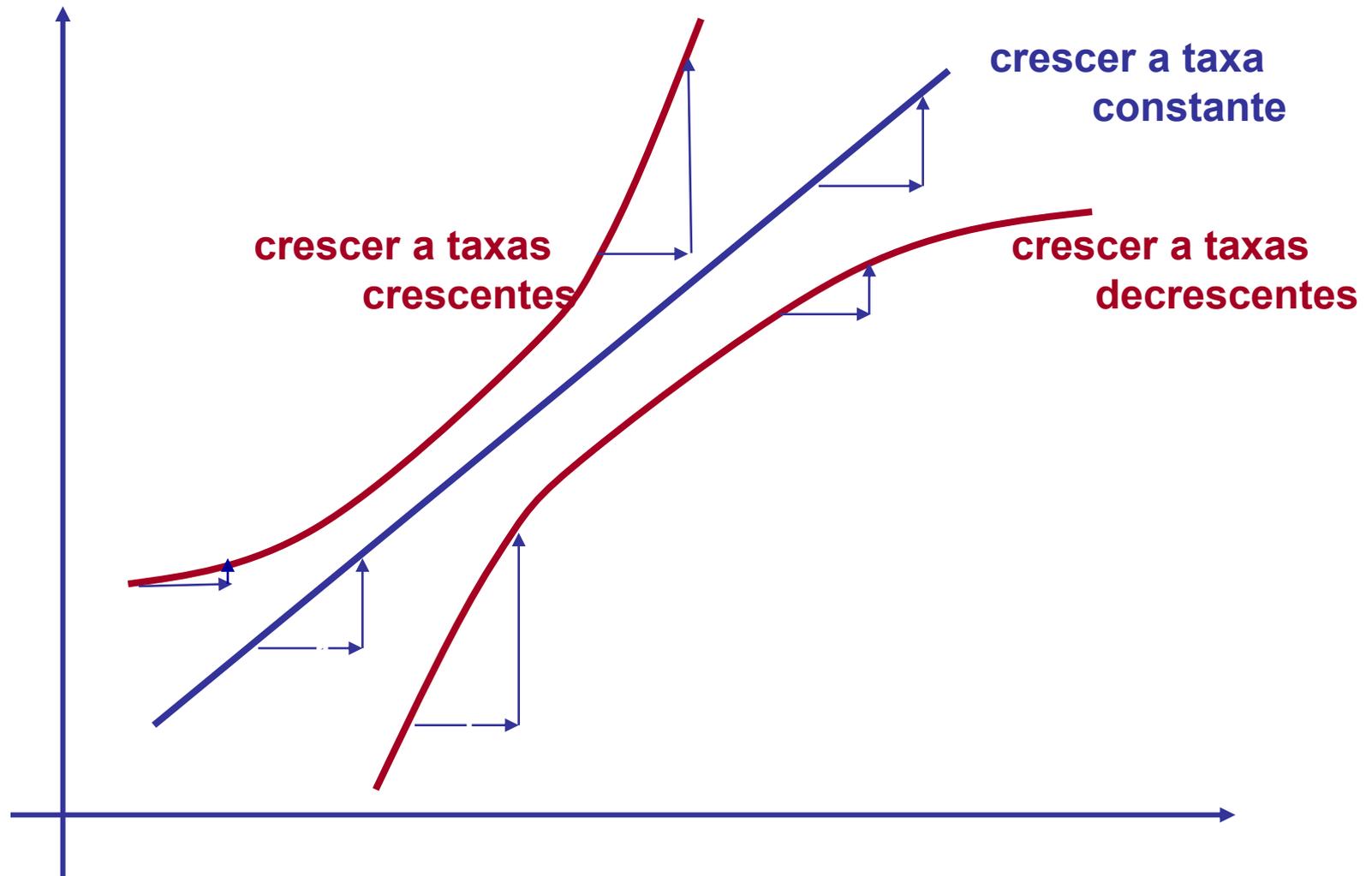
x	1	2	3	4	...	7	8	...	20,4	21,4	...	$8\pi$	$8\pi + 1$	...	1997,1	1998,1...
y	5	10	15	20	...	35	40	...	102	107	...	$40\pi$	$40\pi + 5$	...	9985,5	9990,5...

$\frac{y}{x}$  = constante = 5 ; quando x aumenta de 1, y aumenta de 5



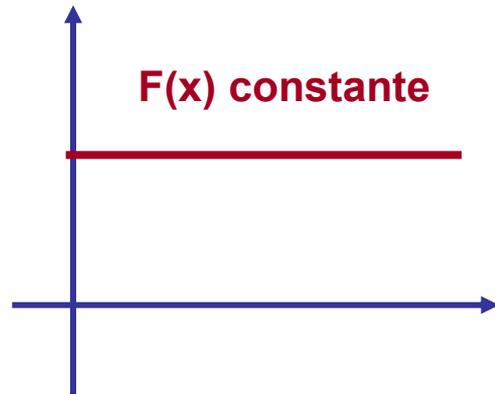
5 é a taxa de variação  
de y em relação a x

# Idéias fundamentais do Cálculo: as três formas básicas de crescimento

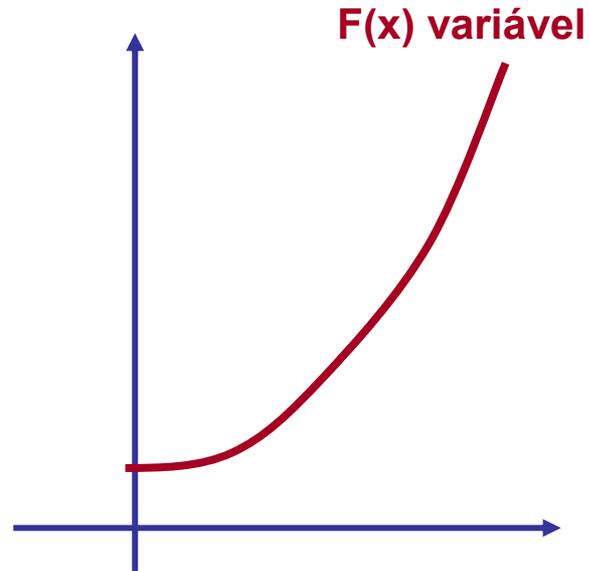


**as três formas básicas de crescimento**

# Uma idéia fundamental do Cálculo: a integral como síntese de Raul Seixas e Gabriela

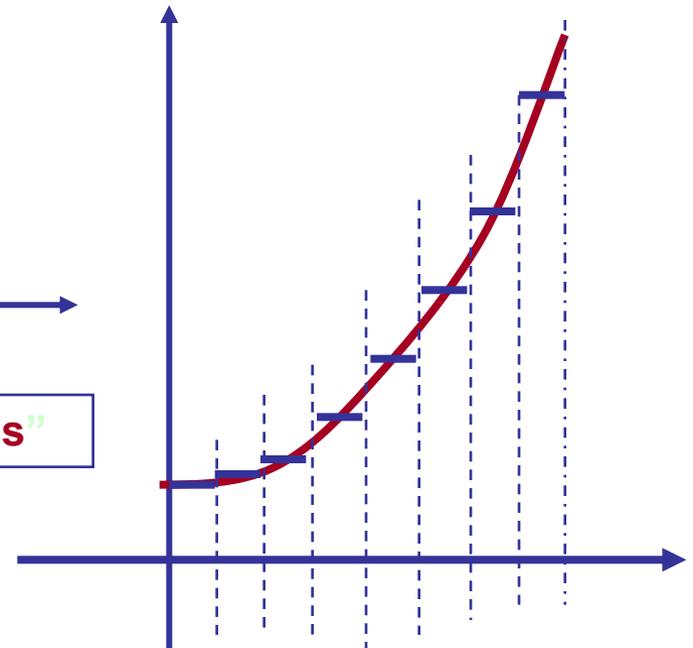


função "Gabriela"

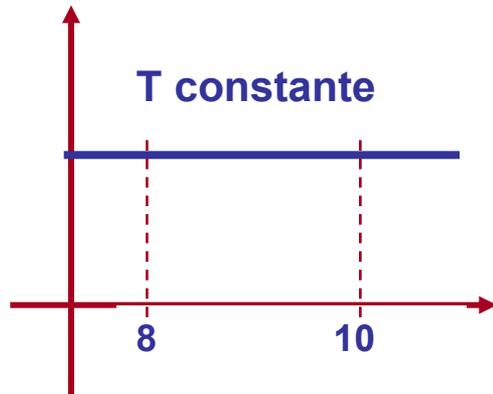


função "Raul Seixas"

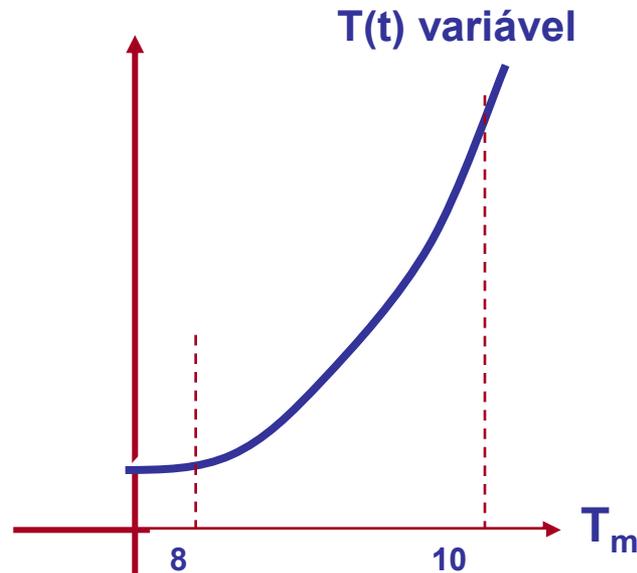
aproximando uma  
função variável por  
funções constantes



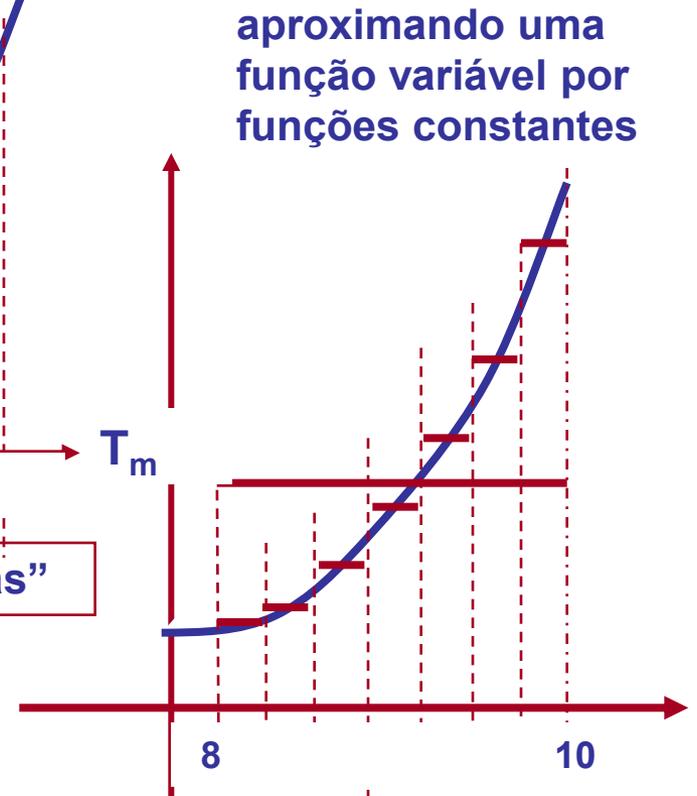
# Uma idéia fundamental do Cálculo: qual a temperatura média da sala entre 8h e 10h?



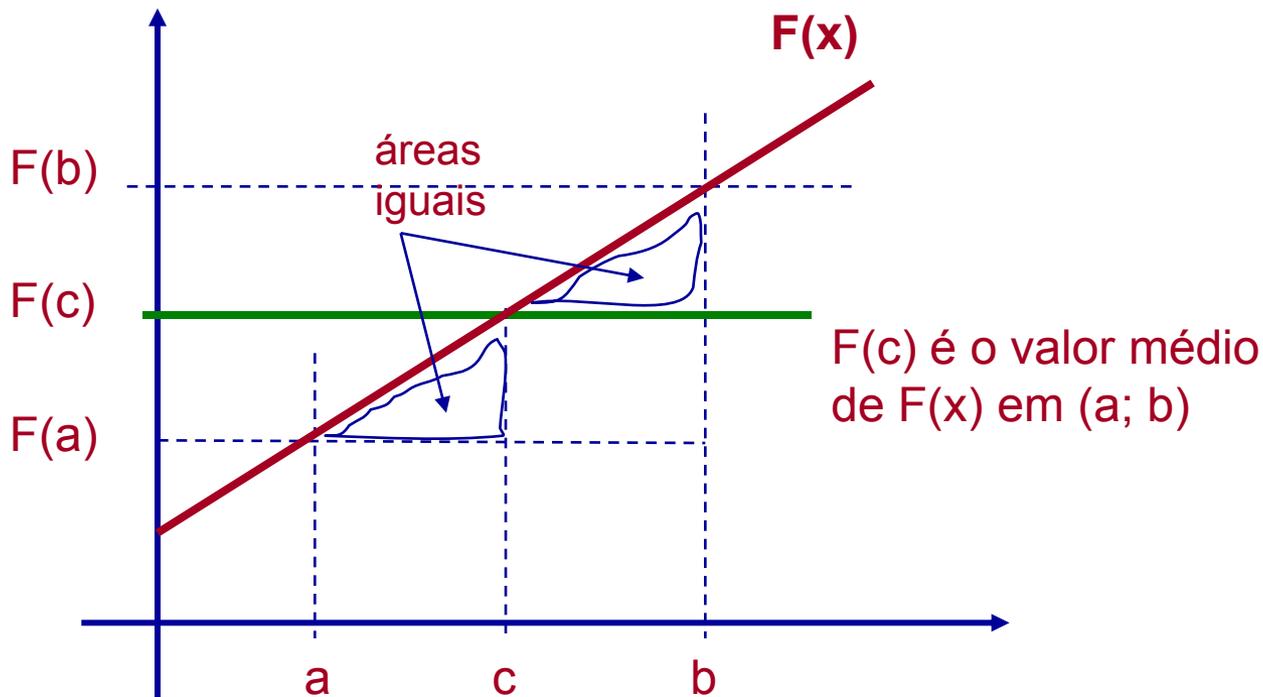
função “Gabriela”



função “Raul Seixas”

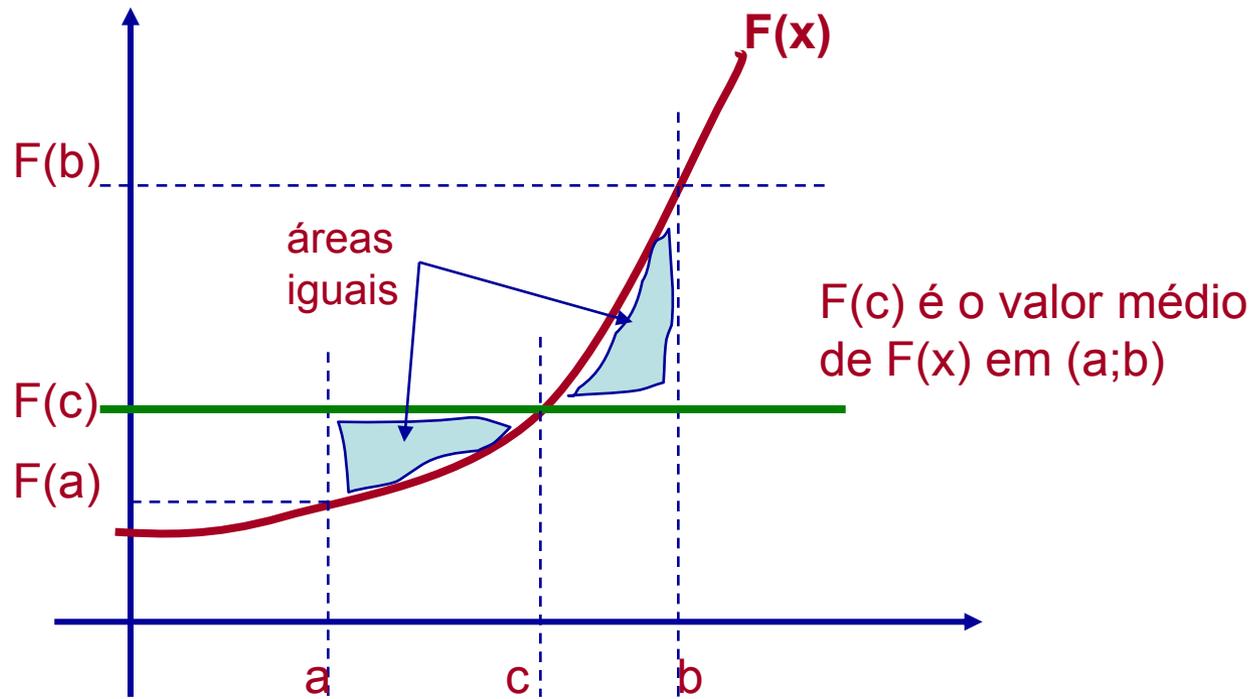


# Uma idéia fundamental do Cálculo: o valor médio



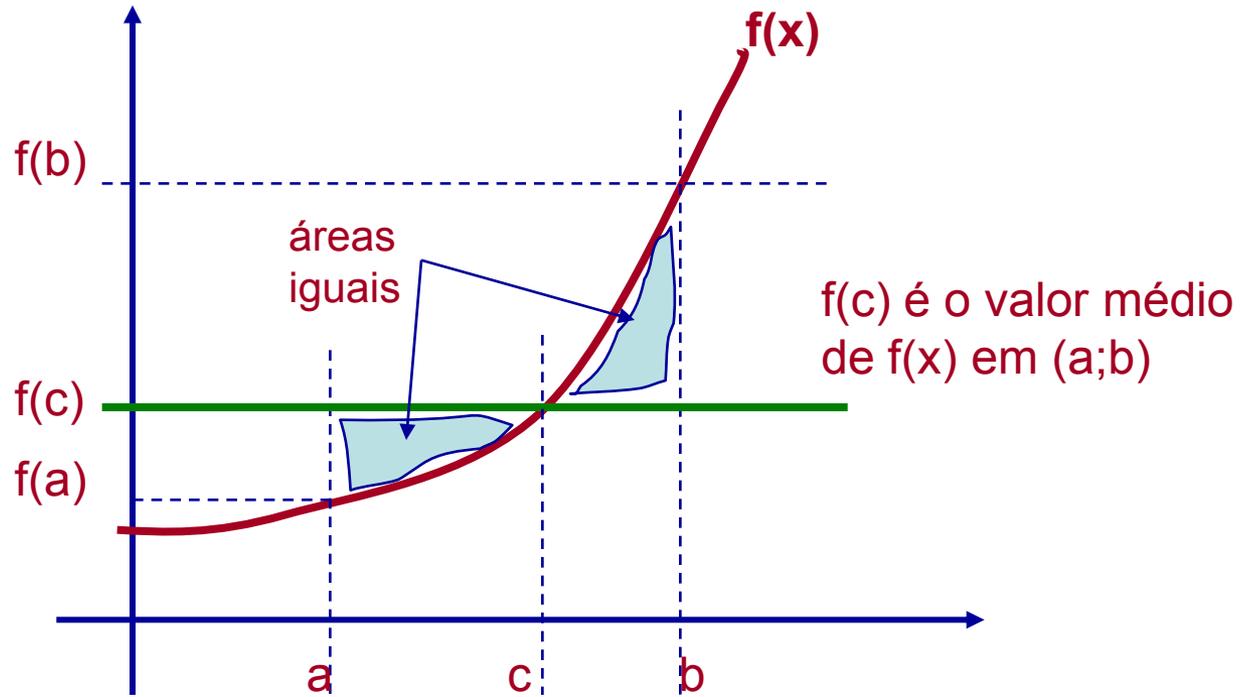
$$F(c) = (F(a) + F(b))/2$$

# Cálculo: a idéia de média



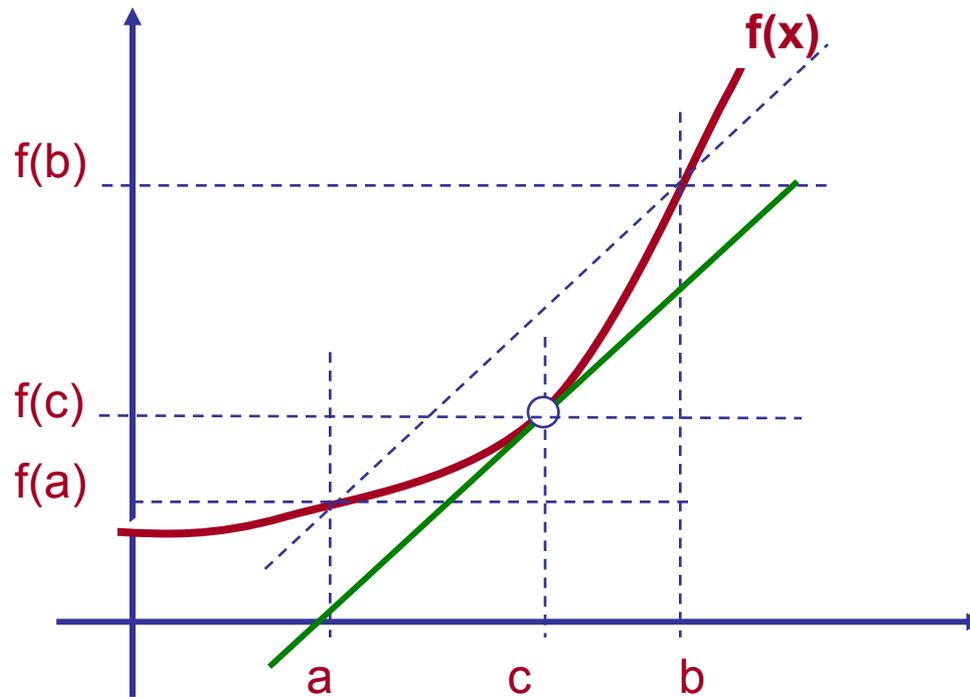
$$F(c) \neq (F(a) + F(b))/2$$

# Cálculo: a idéia de média



$$f(c) \cdot (b - a) = \text{Área entre } a \text{ e } b = A(b) - A(a) = \text{Integral de } f(x) \text{ entre } a \text{ e } b$$

# Cálculo: a idéia de média

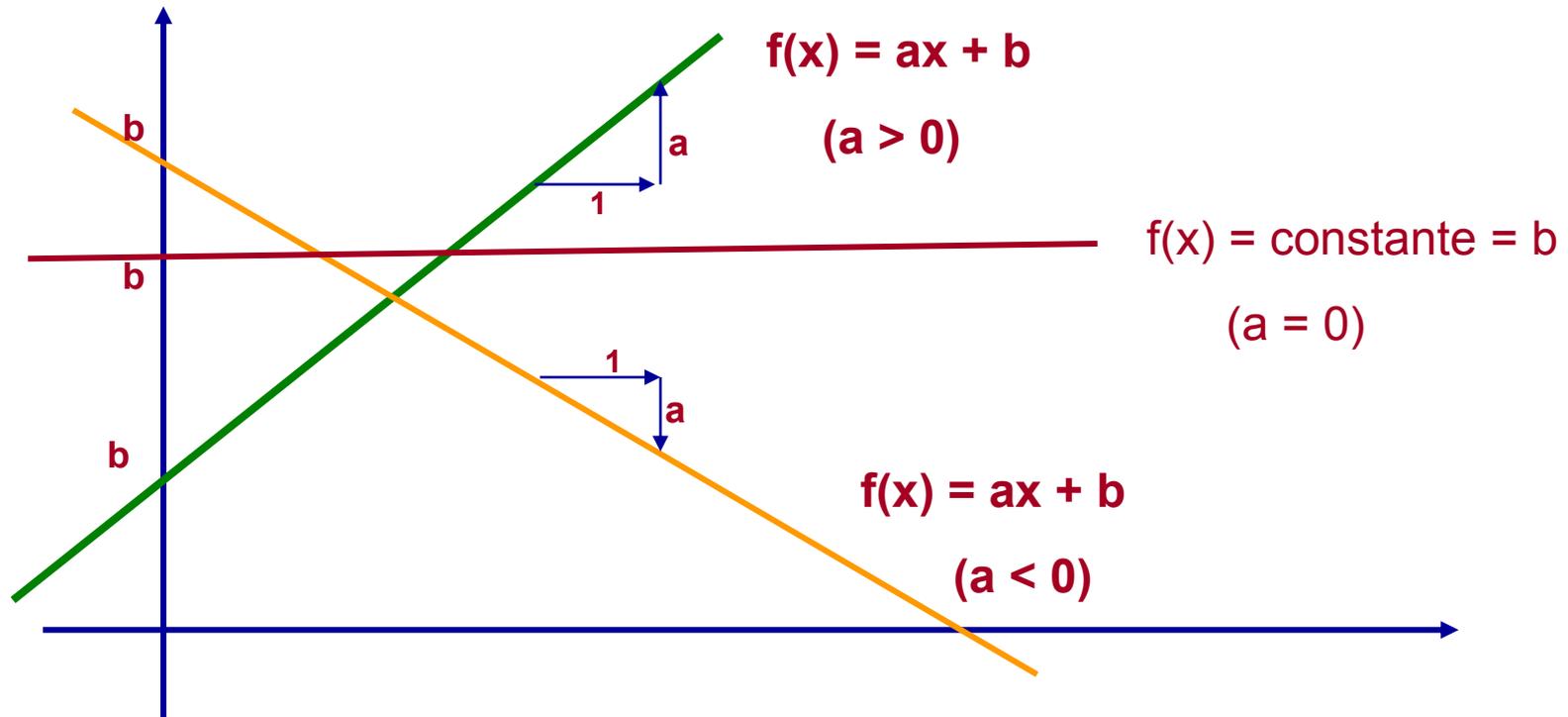


tangente em  $(c; f(c))$  é paralela à secante em  $(a; f(a)), (b; f(b))$

$$f'(c) = (f(b) - f(a)) / (b - a)$$

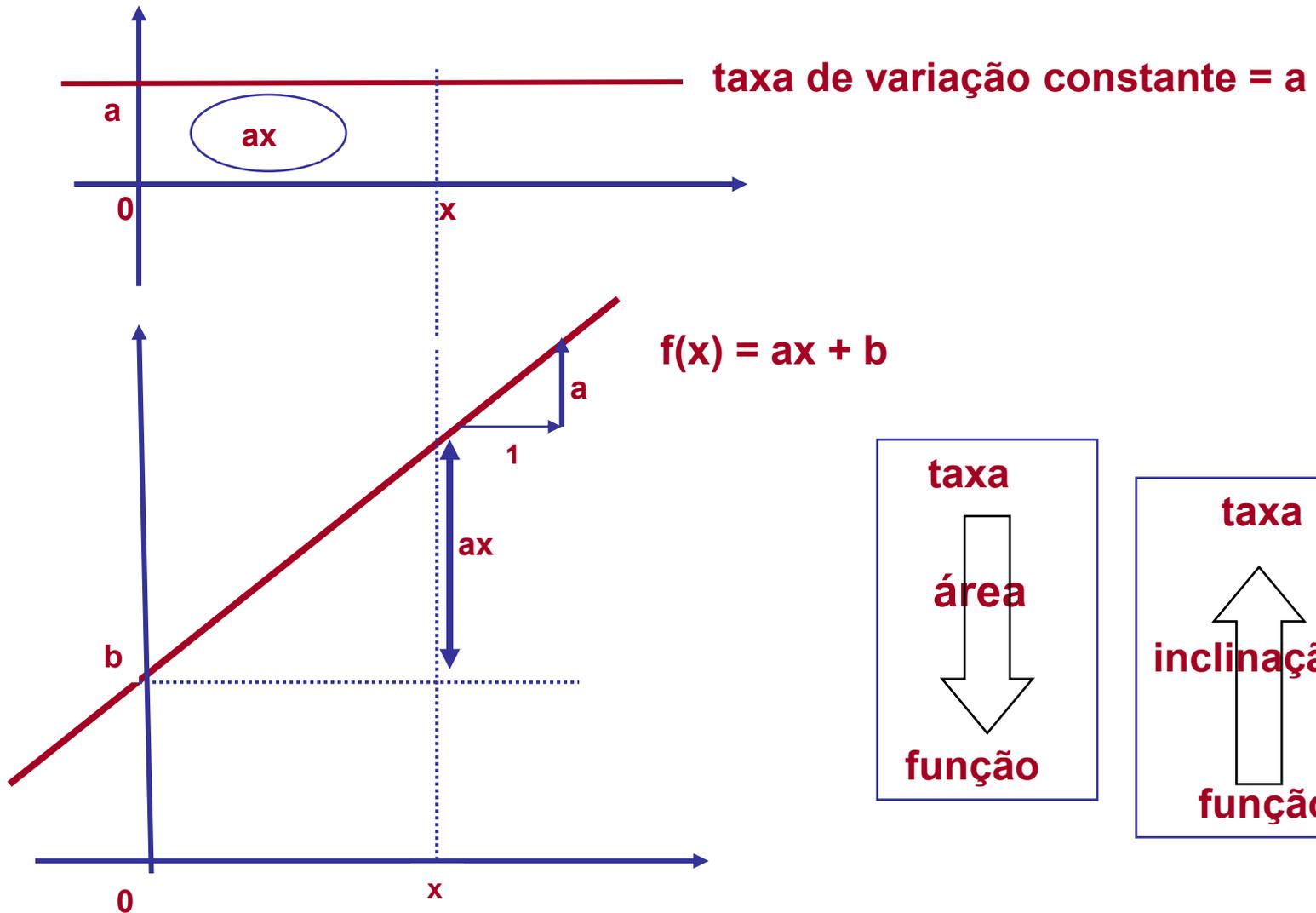
$$f'(c) \cdot (b - a) = f(b) - f(a)$$

# Idéias fundamentais do Cálculo: um curso de cálculo para funções do tipo $f(x) = ax + b$

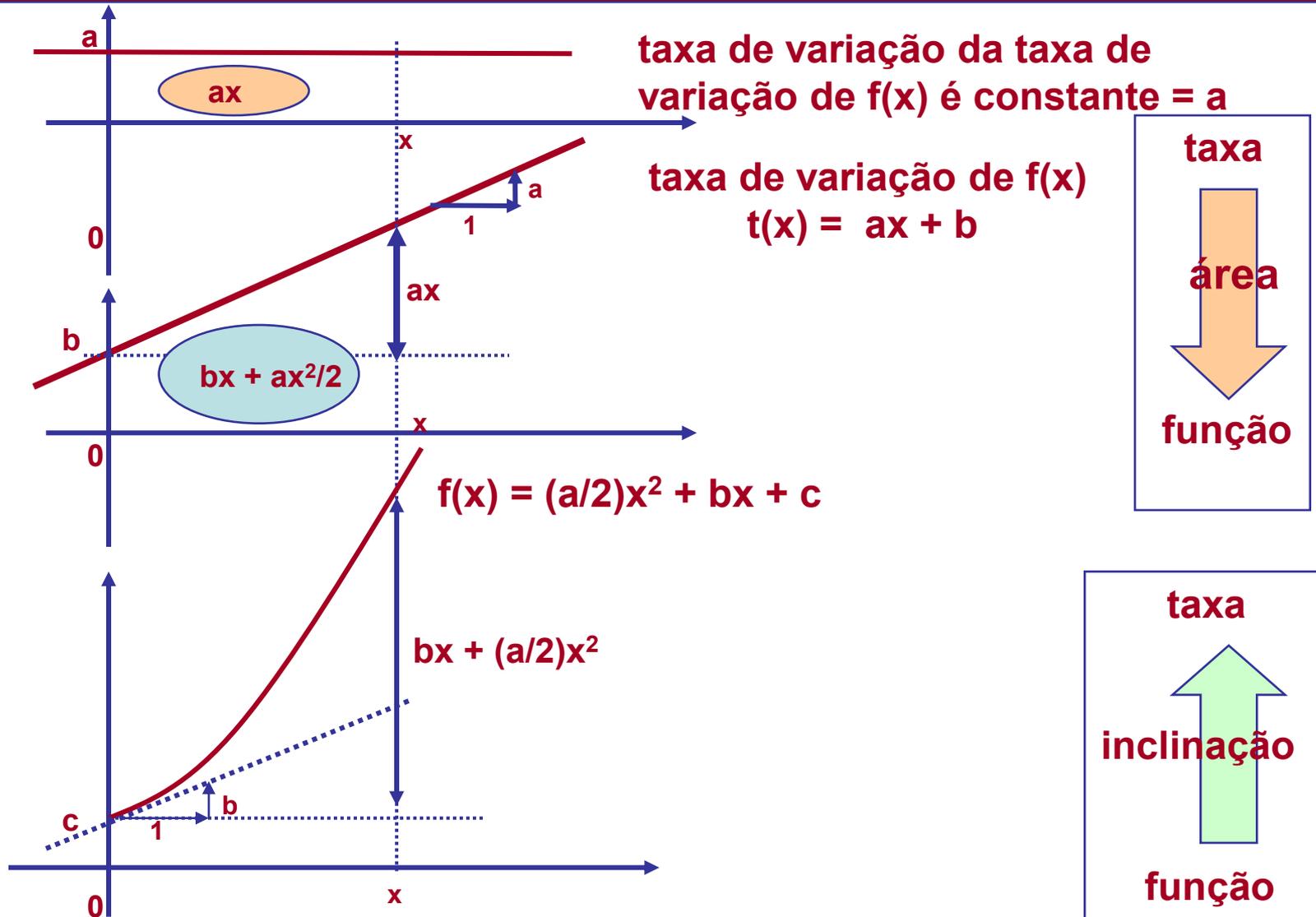


- se  $a = 0$ , então a função é constante (taxa de variação nula)
- se  $a \neq 0$ , então  $f(x)$  cresce a uma taxa constante quando  $a > 0$  e decresce a uma taxa constante quando  $a < 0$
- a constante  $a$  representa a taxa de variação de  $f(x)$ , ou seja, a variação de  $f(x)$  por unidade a mais de  $x$

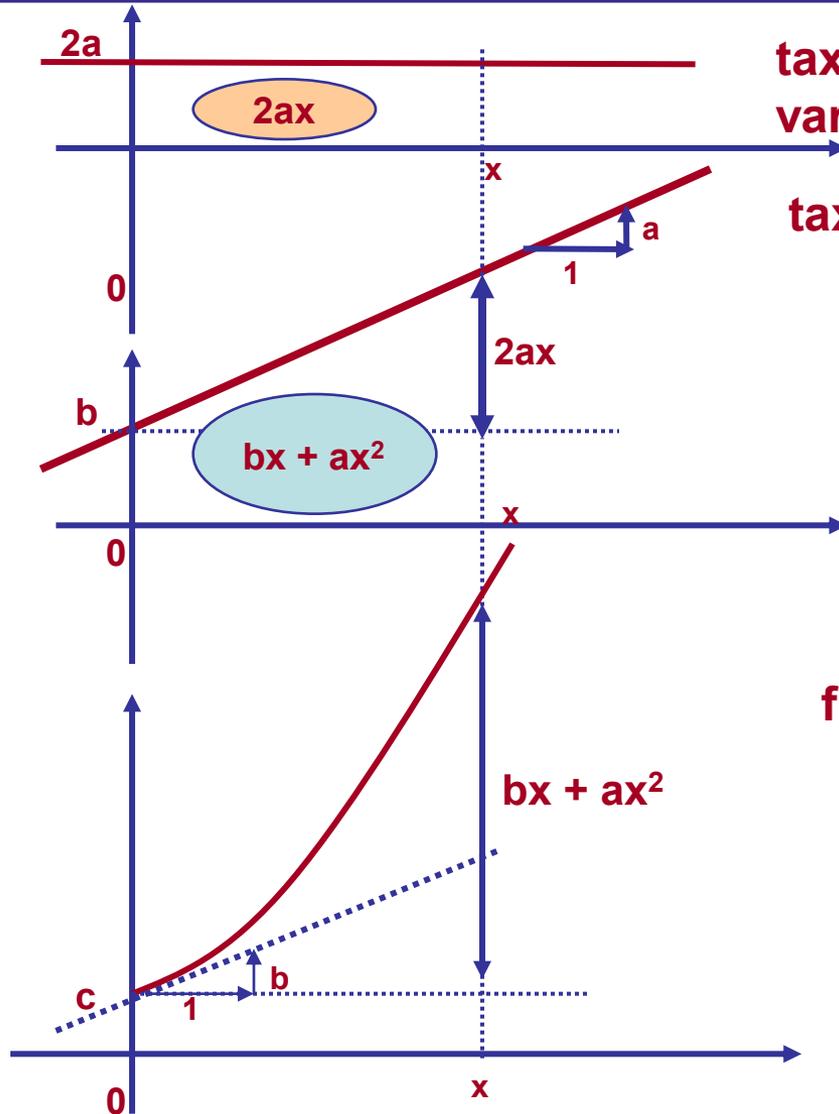
# Idéias fundamentais do Cálculo: um curso de cálculo para funções do tipo $f(x) = ax + b$



# cálculo para funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$



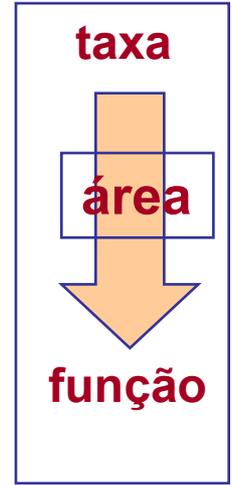
# cálculo para funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$



taxa de variação da taxa de variação de  $f(x)$  é constante =  $2a$

taxa de variação de  $f(x)$   
 $t(x) = 2ax + b$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

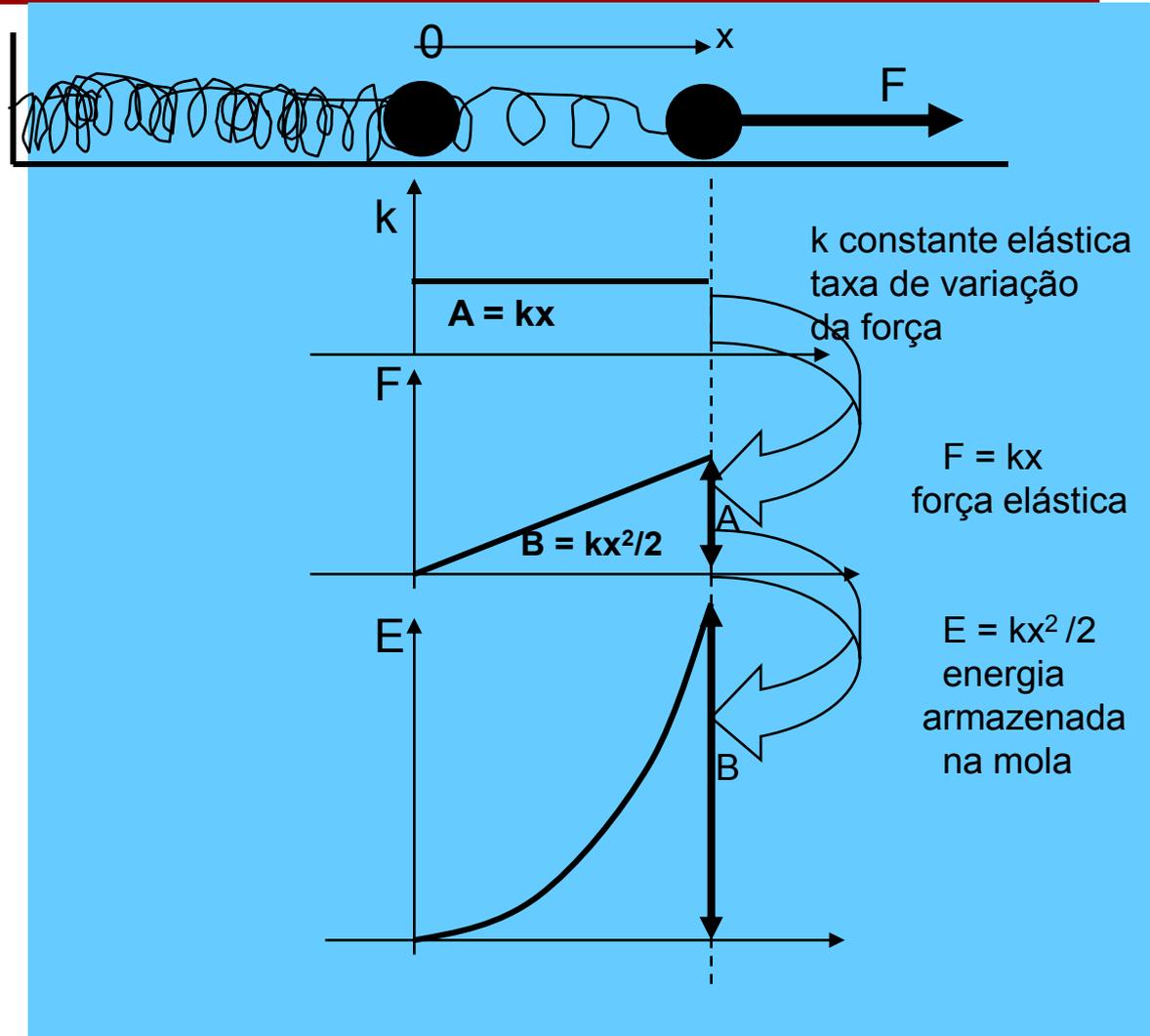


# Cálculo no Trinômio do 2º Grau

- Algo semelhante ao que ocorre na relação entre  $k$ ,  $F$  e  $E$  no sistema massa-mola...

$k = \text{constante} = \text{taxa de } F$   
 $F(x) = kx$   
 $E(x) = (k/2)x^2$ ,  
sendo  $E'(x) = F(x)$

**também ocorre em qualquer trinômio do 2º grau...**



# Cálculo no Trinômio do 2º Grau

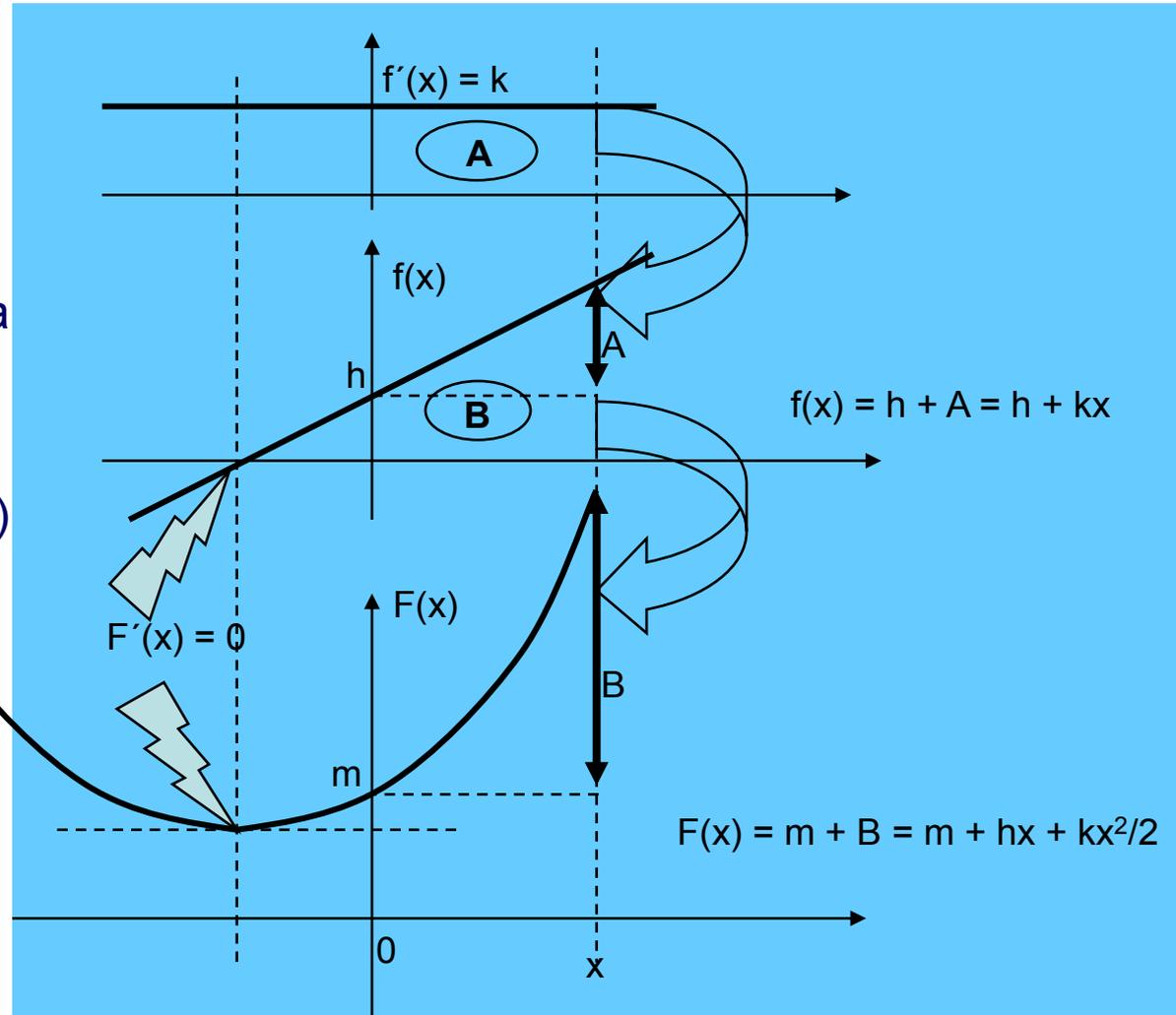
$$f'(x) = k$$

$$f(x) = kx + h$$

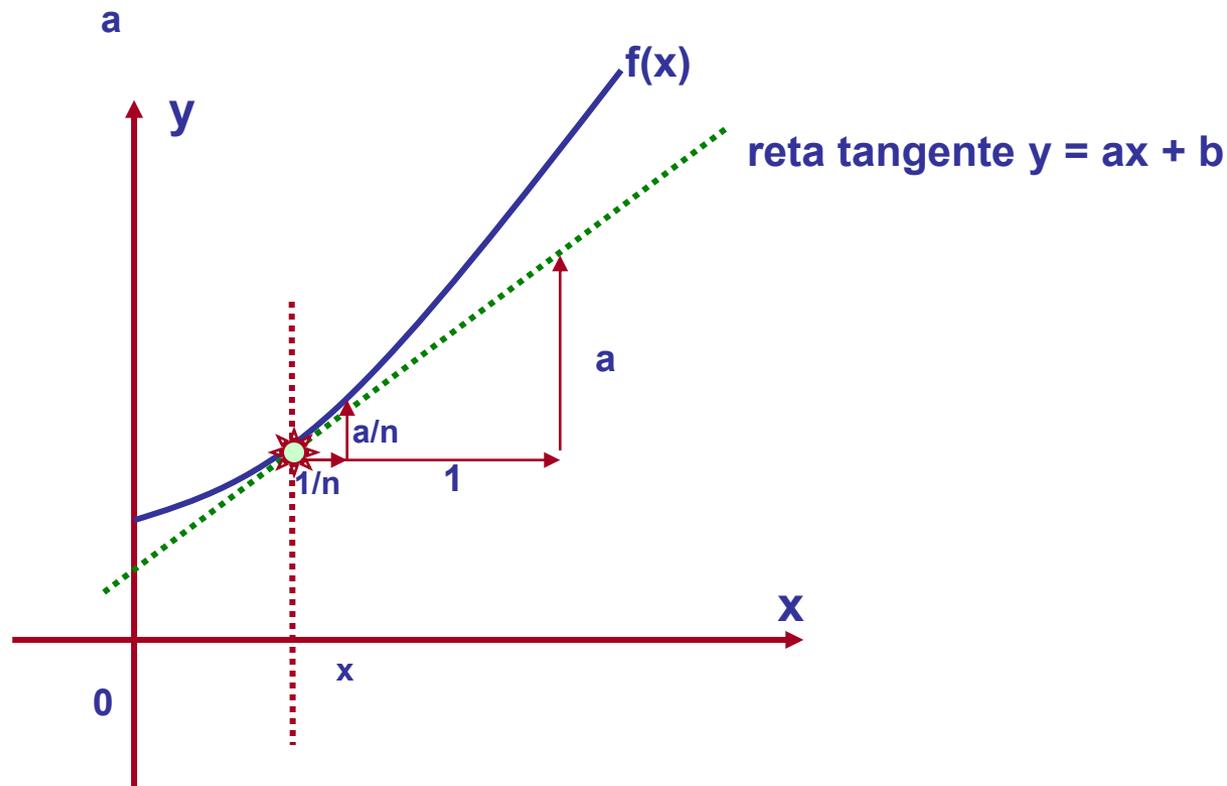
$$F(x) = (k/2)x^2 + hx + m$$

sendo  $F'(x) = f(x)$

- $f'(x)$  é constante, e é igual à taxa de variação de  $f(x)$
- $f(x)$  é crescente, e é igual à taxa de variação de  $F(x)$
- $F(x)$  tem taxa de variação crescente, mas a taxa de variação de sua taxa é constante
- Em qualquer polinômio, a taxa da taxa da taxa... da taxa é constante...

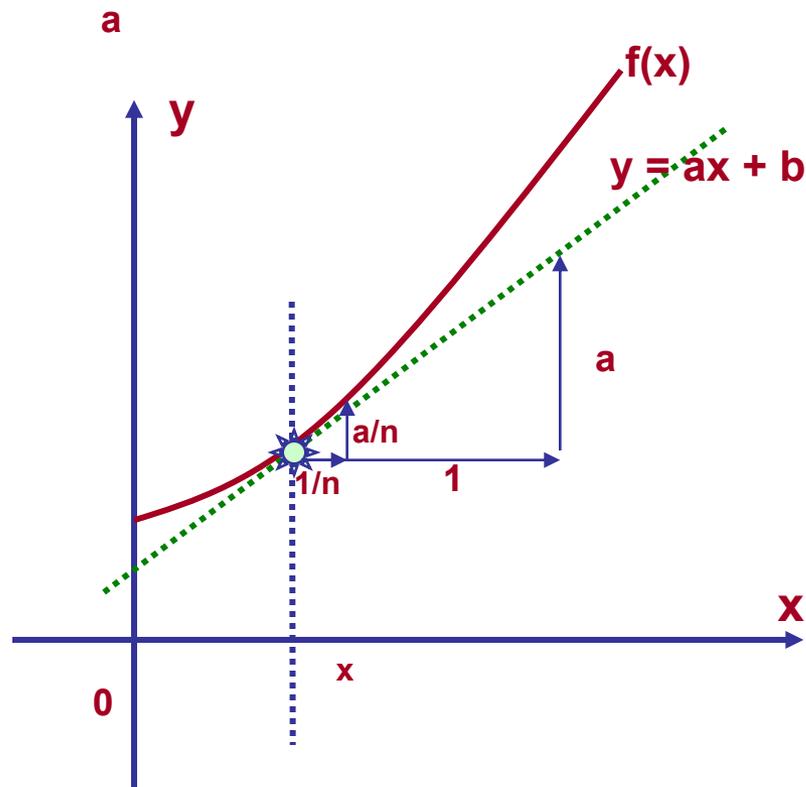


# cálculo da taxa de variação instantânea



$$a = n \cdot a/n = f'(x) \cong [f(x + 1/n) - f(x)] \cdot n$$

# cálculo da taxa de variação instantânea de $f(x) = e^x$



$$a = n \cdot a/n = f'(x) \cong [f(x + 1/n) - f(x)] \cdot n$$

$$e \cong (1 + 1/n)^n$$

$$e^{1/n} \cong (1 + 1/n)$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(x + 1/n) = e^{x + 1/n}$$

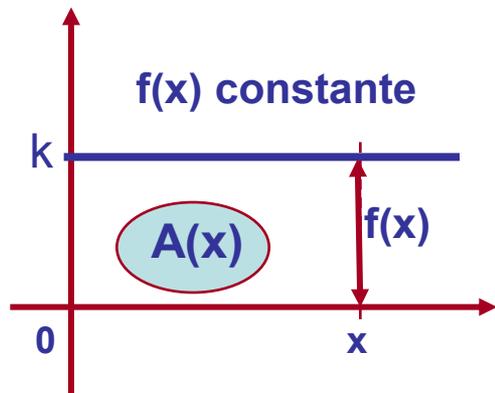
$$f(x + 1/n) - f(x) = e^x \cdot (e^{1/n} - 1)$$

$$f(x + 1/n) - f(x) = e^x \cdot (1/n)$$

$$n \cdot [f(x + 1/n) - f(x)] = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

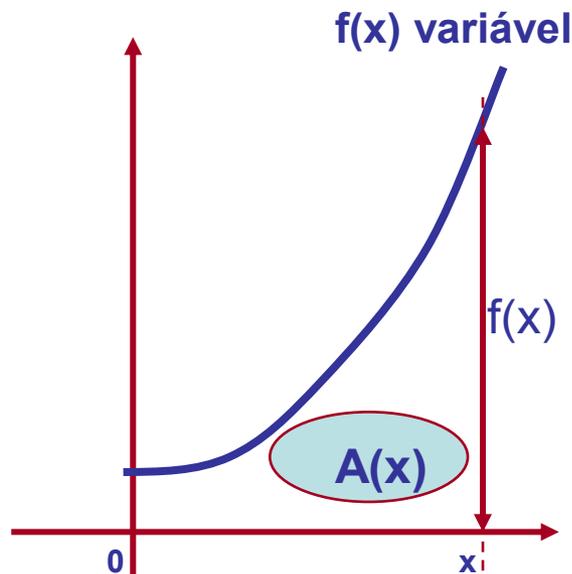
# O Teorema Fundamental do Cálculo: a derivação e a integração como operações inversas



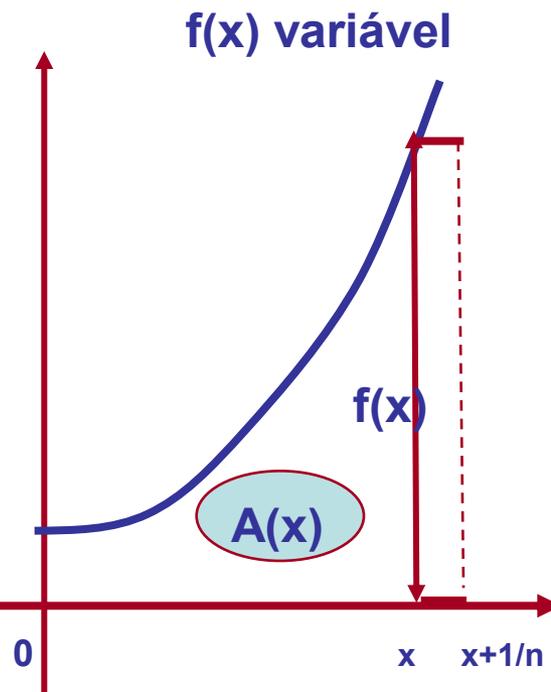
$$A(x) = kx$$

taxa de variação:  $k$

$$A'(x) = k$$



$$A'(x) = f(x)$$



$$A'(x) \cdot 1/n \cong [A(x+1/n) - A(x)]$$

- dada a função, achar a taxa é derivar
- dada a taxa, achar a função é integrar