Universidade de São Paulo / Faculdade de Educação / Programa de Pós-Graduação em Educação
Linhas de Pesquisa: ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA e LINGUAGEM E EDUCAÇÃO

Seminários de Estudo em Epistemologia e Didática (SEED) 1º semestre de 2007
Coordenação: Prof Dr Nilson José Machado

Matemática: objetos e representações

Maria Cristina Bonomi – IME-USP
cribs@ime.usp.br

Não existe noesis sem semiosis.
Raymond Duval

Segundo Galileu, o Universo está escrito em linguagem matemática e a aprendizagem, no sentido da compreensão dessa linguagem, é fundamental para o entendimento do *imenso livro*. De fato, diferentes figuras geométricas podem ser encontradas na natureza, que é a responsável primeira pela construção de formas belas, perfeitas e variadas, como já observara Galileu.

Ao longo da história da humanidade, o estudo da natureza gerou vários conhecimentos, possibilitando a solução de diversos problemas e, até mesmo como conseqüência, a inevitável colocação de outros, cada vez mais sofisticados. O par problema–solução constitui, e sempre constituiu, um movimento constante, e o gerenciamento dessa interação promove a compreensão e o progresso. Basta lembrar Bachelard para quem *o homem animado pelo espírito científico deseja sem dúvida saber para poder logo depois melhor perguntar*, ou seja, resolver um problema colocado instiga a colocação de novas perguntas, novos questionamentos e daí novos problemas. A resolução dos problemas, tanto por uma questão de curiosidade inerente à condição humana como, muitas vezes, pela própria necessidade de buscar soluções para situações concretas, ou mesmo encontrar a solução ótima dentre várias possíveis, possibilitou desde sempre a construção do conhecimento humano nas diferentes esferas do saber, desde o mais básico até o mais sofisticado.

No caso específico da Matemática, as regularidades e outras propriedades dos fenômenos que podem ser observados inicialmente na natureza, mas também nas construções das formas e das idéias, foram e, continuam sendo, estudadas pelo homem, com a criação de modelos matemáticos que buscam descrever e compreender tais fenômenos.

Na escola, uma das disciplinas sempre presentes nos currículos do mundo inteiro é a Matemática. Desde os primórdios históricos da instituição escolar, pelo menos uma ou mais subáreas da Matemática – como é o caso da Geometria ou da Aritmética – integraram o currículo, como base inclusive para o entendimento do *imenso livro*. A Matemática escolar, entretanto, não estuda apenas as formas geométricas que podem ser identificadas num grande parque, repleto de árvores e flores... ou nas profundezas do mar, por exemplo. Aliás, os objetos estudados em Matemática, normalmente não estão disponíveis para serem examinados ou manipulados. Mesmo os mais "simples", como pontos, retas e planos, conceitos primitivos sobre os quais se baseia a construção de toda a geometria euclidiana, onde encontrá-los? E as funções? E os números?

Diferentemente da Física, da Química ou da Biologia, nas quais os fenômenos são observáveis, na natureza ou em laboratórios, podendo ser estudados em muitas de suas ocorrências, em Matemática, os objetos existem como construções mentais e são conhecidos por meio de suas representações. Isso significa que o ensino–aprendizagem da Matemática precisa levar em conta o par objeto–representação, uma vez que, para possibilitar a compreensão dos objetos matemáticos, é necessário trabalhar com suas representações. De fato, toda elaboração mental em matemática é realizada em algum tipo de registro, seja ele verbal, algébrico ou gráfico, por exemplo. No registro escolhido, descobrem-se relações, propriedades, generalizações, constroem-se teorias matemáticas.

No contexto da Psicologia Cognitiva, Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês, desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, considerando as mudanças de registros de representação semiótica, que levou à publicação de diversos trabalhos, entre os quais *Sémiosis et penseé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, publicado em 1995. A teoria dos registros de representação semiótica tem-se mostrado muito frutífera para a realização de pesquisas no âmbito da Didática da Matemática, sendo que um grande número de investigações tem sido realizado, inclusive no Brasil, utilizando esse referencial teórico.

Para Duval, *semiosis*[1] *é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e noesis*[2] *são os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência*. E, para ele, não há *noesis* sem *semiosis*, ou seja, as construções mentais não existem ou não podem ser consideradas de maneira independente das representações semióticas.

De modo geral, é possível observar que, desde sempre, o progresso dos conhecimentos matemáticos abarca o desenvolvimento de representações dos objetos que estão envolvidos e das relações estabelecidas entre eles. Essa situação ocorre em todos os campos, mas em Matemática é de importância particular. Pense-se, por exemplo, no conceito de limite de uma função que levou mais de dois mil anos para ser sistematizado, envolvendo outros conceitos matemáticos necessários e, para tanto, foi preciso desenvolver todo um sistema de representação formal bem como na língua natural. A utilização dessas representações é condição necessária para a compreensão do conceito de limite. Por outro lado, o objeto limite de uma função só existe nas diferentes representações semióticas, sejam elas figuras ou esquemas, linguagem natural ou formal, tabelas, gráficos etc.

Para Duval (Duval, 2004) a análise do desenvolvimento dos conhecimentos e dos obstáculos encontrados nas aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio, à compreensão de textos e à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos, enfrenta três fenômenos que estão estreitamente relacionados:

❋ a diversidade dos registros de representação semiótica
❋ a diferenciação entre representante e representado
❋ a coordenação entre os diferentes registros

E, mais ainda, para um sujeito, uma representação pode funcionar como tal, isto é, permitindo o acesso ao objeto representado, desde que existam pelo menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação e que espontaneamente possa ser feita

---

[1] Semiótica: [Do gr. *semeiotiké* (*téchne*), 'a arte dos sinais'.] Denominação utilizada, principalmente pelos autores norte-americanos, para a ciência geral do signo; semiologia. (Dicionário Aurélio)

[2] Noese: [Do gr. *nóesis*, 'pensamento', 'inteligência'.] Na fenomenologia, aspecto subjetivo da vivência, constituído por todos os atos que tendem a apreender o objeto: o pensamento, a percepção, a imaginação, etc. Noética: Estudo das leis gerais do pensamento. (Dicionário Aurélio)

a conversão de um registro para o outro e reciprocamente. Quando essas condições não são cumpridas, o objeto e a representação se confundem e não é possível reconhecer duas representações diferentes de um mesmo objeto como representações desse objeto.

Ainda para o mesmo autor, é necessário existir coordenação entre os diferentes sistemas de representação. Essa coordenação se dá no interior de um mesmo registro, recebendo o nome de *tratamento*, ou entre registros diferentes, quando é denominada *conversão*.

É possível observar que o ensino privilegia a aprendizagem das regras que concernem à formação das representações semióticas e as que concernem ao seu tratamento, principalmente, no caso de registros em língua natural, numéricos, escrita simbólica. Mas, como alerta Duval, a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos.

Além disso, experiências realizadas por investigadores dessa área de pesquisa têm mostrado que:

❋ o registro representativo na língua natural é considerado diferente dos outros, pelos aprendizes, não adequado à Matemática, e isso por vários motivos: não leva a fazer algo; não contém números ou figuras, elementos típicos da Matemática

❋ alguns registros trazem consigo elementos de confusão, informações parasitas, que dependem da maneira pela qual a questão foi proposta, o que, em geral, para um adulto é casual, mas para o estudante não;

❋ os registros não são neutros ou de mesmo valor informativo e semântico; eles não apenas representam o objeto, mas algo mais; a tradução não é banal e imediata;

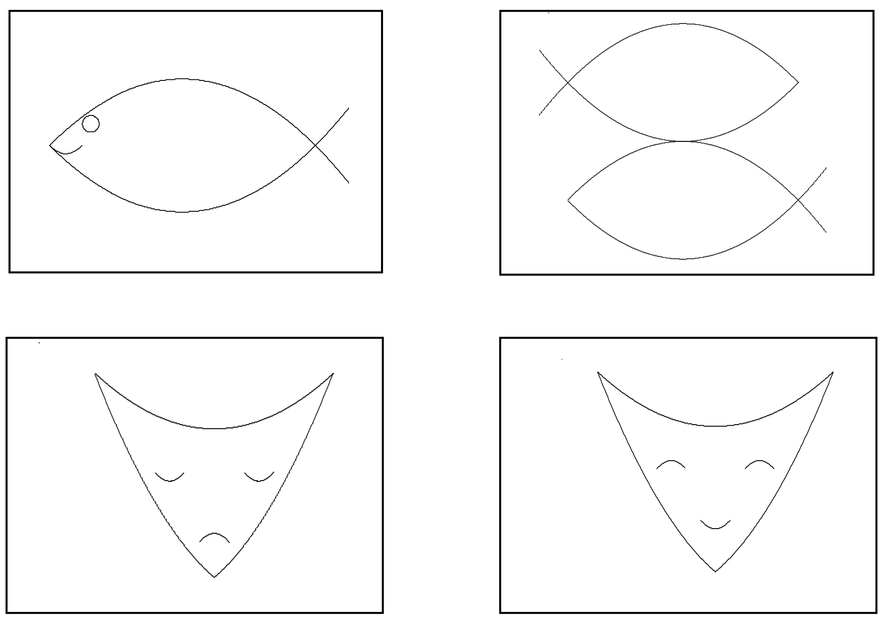
❋ o vínculo entre registros representativos diferentes, portanto entre significantes diferentes de um mesmo significado, não é visto pela totalidade dos alunos; é preciso levar em consideração tal fato em todos os níveis escolares.

No caso específico do Cálculo Diferencial e Integral, é possível observar que existe uma tendência bastante generalizada de apresentar o conceito – objeto matemático – na língua natural e em registro algébrico-formal. A partir daí, há uma grande ênfase de tratamento no registro algébrico-formal em praticamente todos os temas relativos ao conteúdo específico. Em alguns casos, são feitas representações no registro gráfico, com conversões normalmente realizadas num único sentido: do registro algébrico-formal para o registro gráfico.

Nos exemplos subseqüentes, sem pretensão alguma de esgotar o assunto, são apresentadas algumas situações que pretendem concretizar a questão dos objetos e das representações, enfocando principalmente o tratamento no registro gráfico ou a conversão no sentido oposto ao habitual, que é, em geral, exaustivamente considerado.

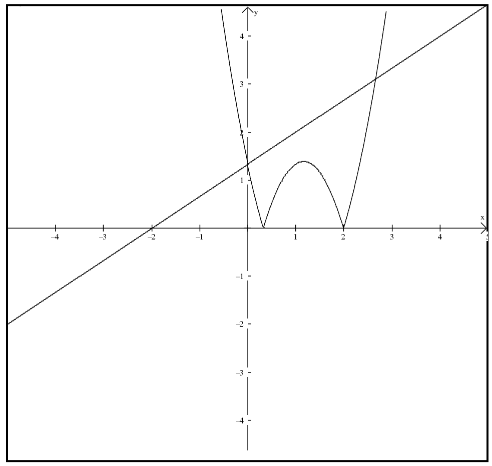
Exemplo 1. As funções e seus gráficos.

❋ Com arcos de parábolas, construa as figuras abaixo, dando as expressões das funções e seus respectivos domínios; você pode usar uma circunferência e um segmento de reta vertical: conversão do registro gráfico para o algébrico.

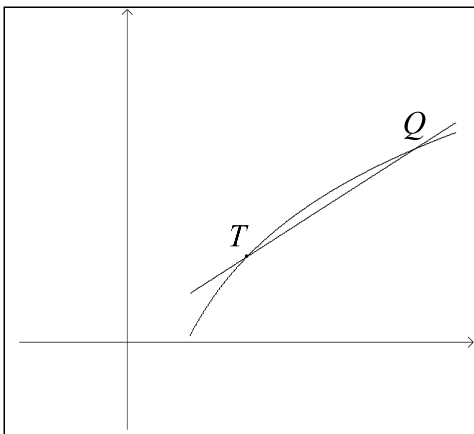
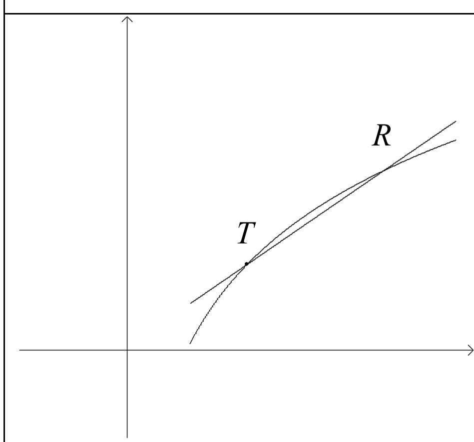


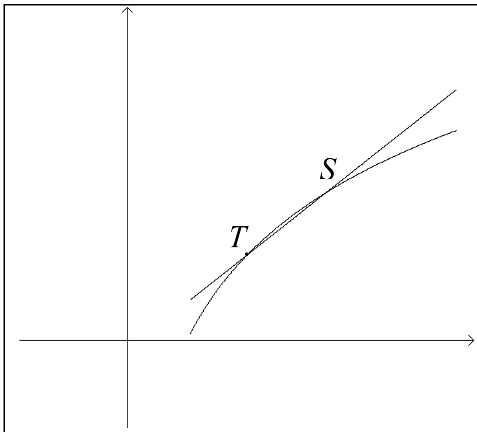
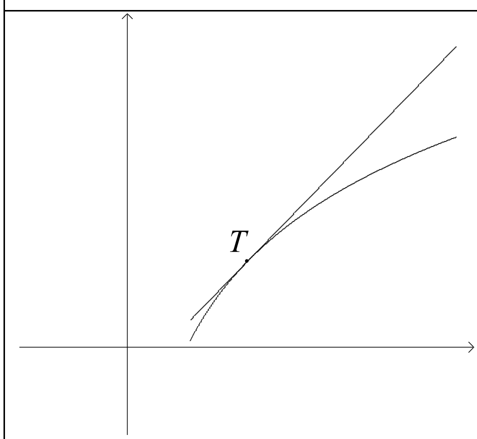
Exemplo 2. A resolução de inequações sempre foi apresentada para os alunos no registro algébrico. O tratamento nesse registro pressupõe a utilização de propriedades das desigualdades, que muitas vezes carecem de significação. Dificilmente, nos livros didáticos, pede-se a solução gráfica, com a comparação dos gráficos das funções envolvidas na desigualdade dada. É possível imaginar a dificuldade encontrada pelos estudantes ao se defrontarem com um problema do seguinte tipo:

❋ Invente uma inequação cuja solução gráfica possa ser obtida a partir do gráfico abaixo, dando, em seguida, o conjunto solução da inequação inventada.

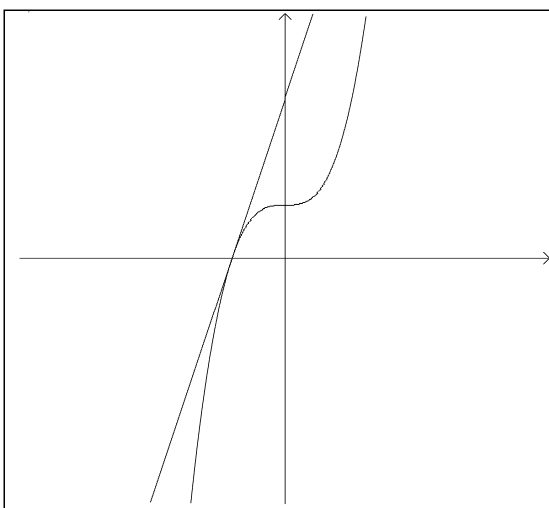


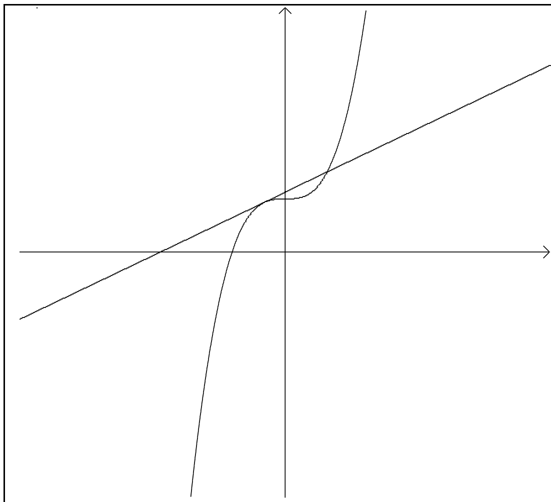
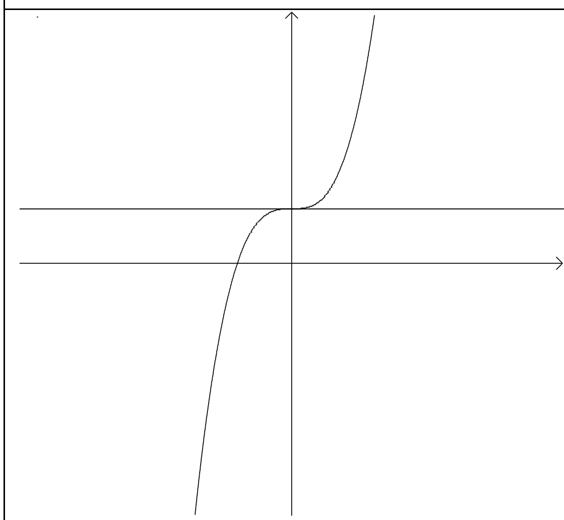
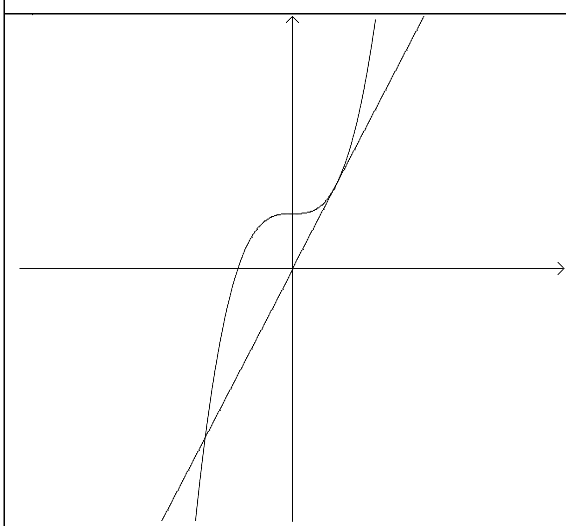
Exemplo 3. Conceito de derivada de uma função em um ponto do domínio.

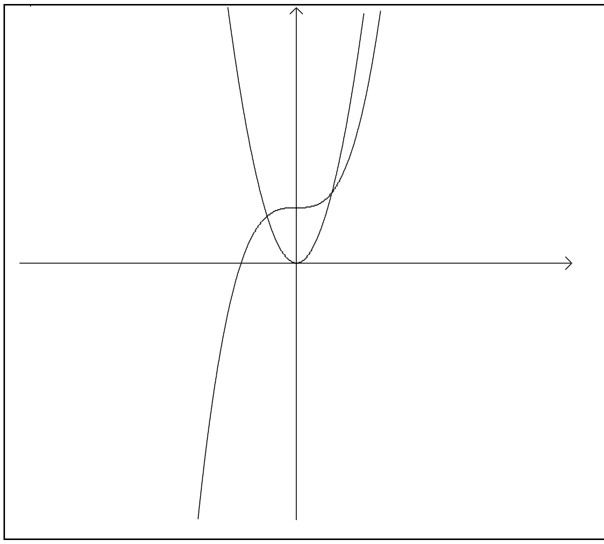
	A reta secante à curva pelos pontos $T =$ e $Q =$ tem coeficiente angular dado por: $m_1 = \Delta \quad - \quad -$ Sendo $y =$ podemos escrever $m_1 = \dfrac{f(x\ )-}{x_Q -}$
	A reta secante à curva pelos pontos $T =$ e $R =$ tem coeficiente angular dado por: $m_2 = \Delta \quad - \quad -$ Sendo $y =$ podemos escrever $m_2 = \dfrac{f(x\ )}{x_R -}$

	A reta secante à curva pelos pontos $T =$ e $S =$ tem coeficiente angular dado por: $m_3 = \Delta -$ $-$ Sendo $y =$ podemos escrever $m_3 = \frac{f(\ )}{x_S -}$
. . .	. . .
	A reta tangente à curva que é gráfico de $y =$ passando pelo ponto $T =$ tem coeficiente angular dado por: $m = {}_{h \to} \frac{f(x_T + \ -}{h}$ onde *h* é tão pequeno quanto se queira. O valor de *m* é denominado a derivada da função *f* no ponto x_T.

Exemplo 4. Dada a função por meio de seu gráfico, esboce o gráfico de sua derivada.

	Para $x <$, o coeficiente angular da reta tangente é positivo e diminui, conforme *x* aumenta.

	Para $x <$, o coeficiente angular da reta tangente é positivo e diminui, conforme *x* aumenta.
	Para $x =$, o coeficiente angular da reta tangente é zero, ou seja, a reta tangente é horizontal.
	Para $x >$, o coeficiente angular da reta tangente é positivo e aumenta, conforme *x* aumenta

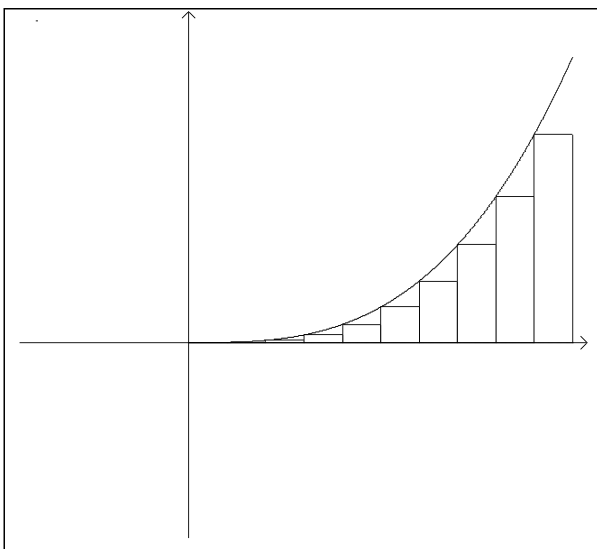


A função inicial é: $f(x) = \quad +$

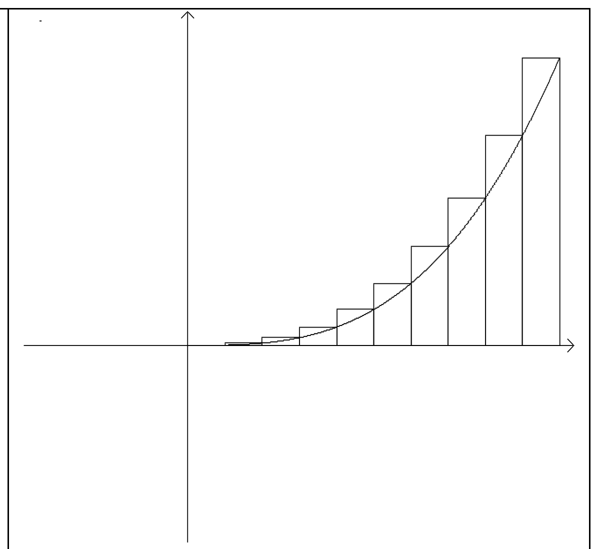
A função derivada é: $f\,'(x) =$

Exemplo 5. Conceito de integral (definida) de uma função contínua em um intervalo fechado.

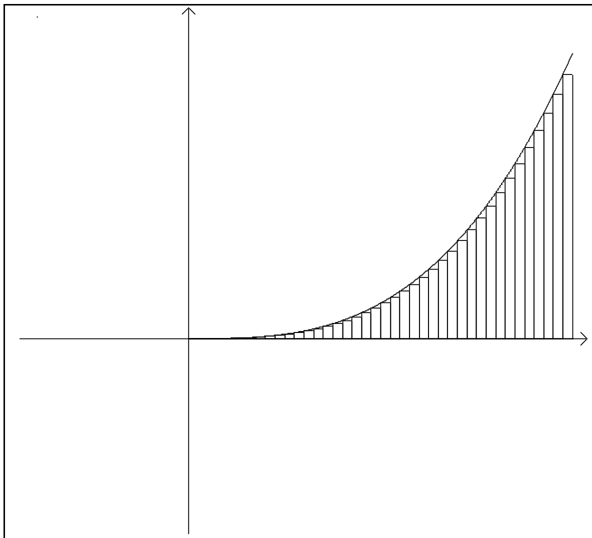
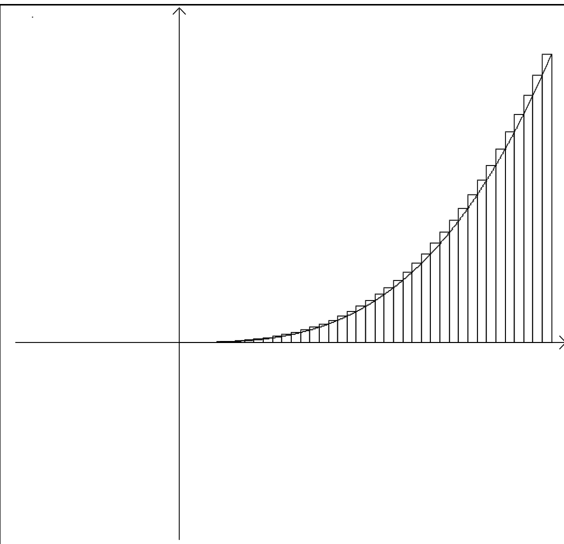
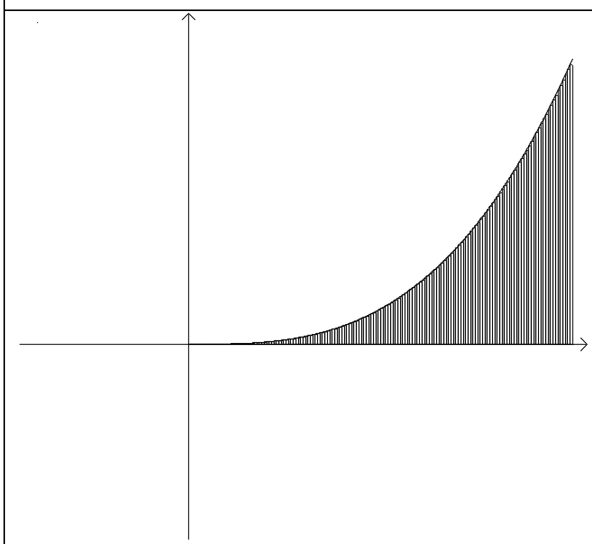
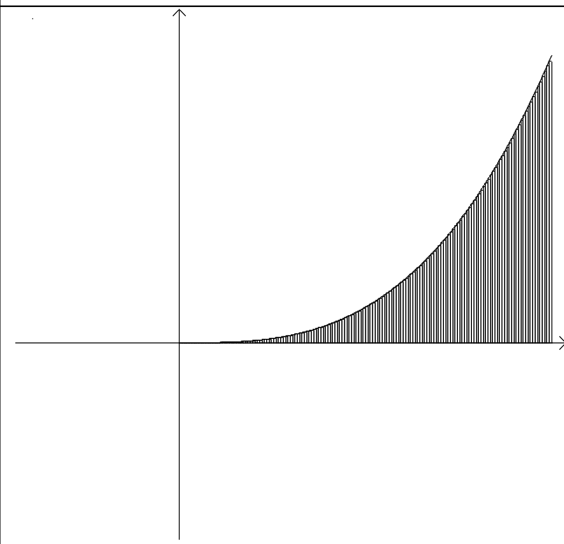
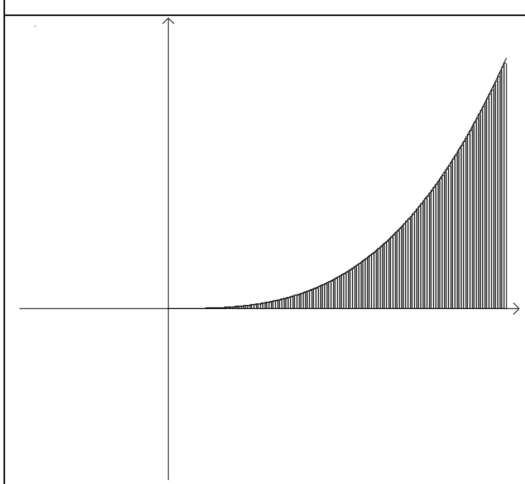
❋ Seja *f* uma função contínua definida no intervalo fechado *I* e tal que o gráfico está sempre acima do eixo *x*. Vamos calcular a área da região do compreendida entre o eixo horizontal e o gráfico de *f*.



Área aproximada por falta: 4,219 (10 divisões)

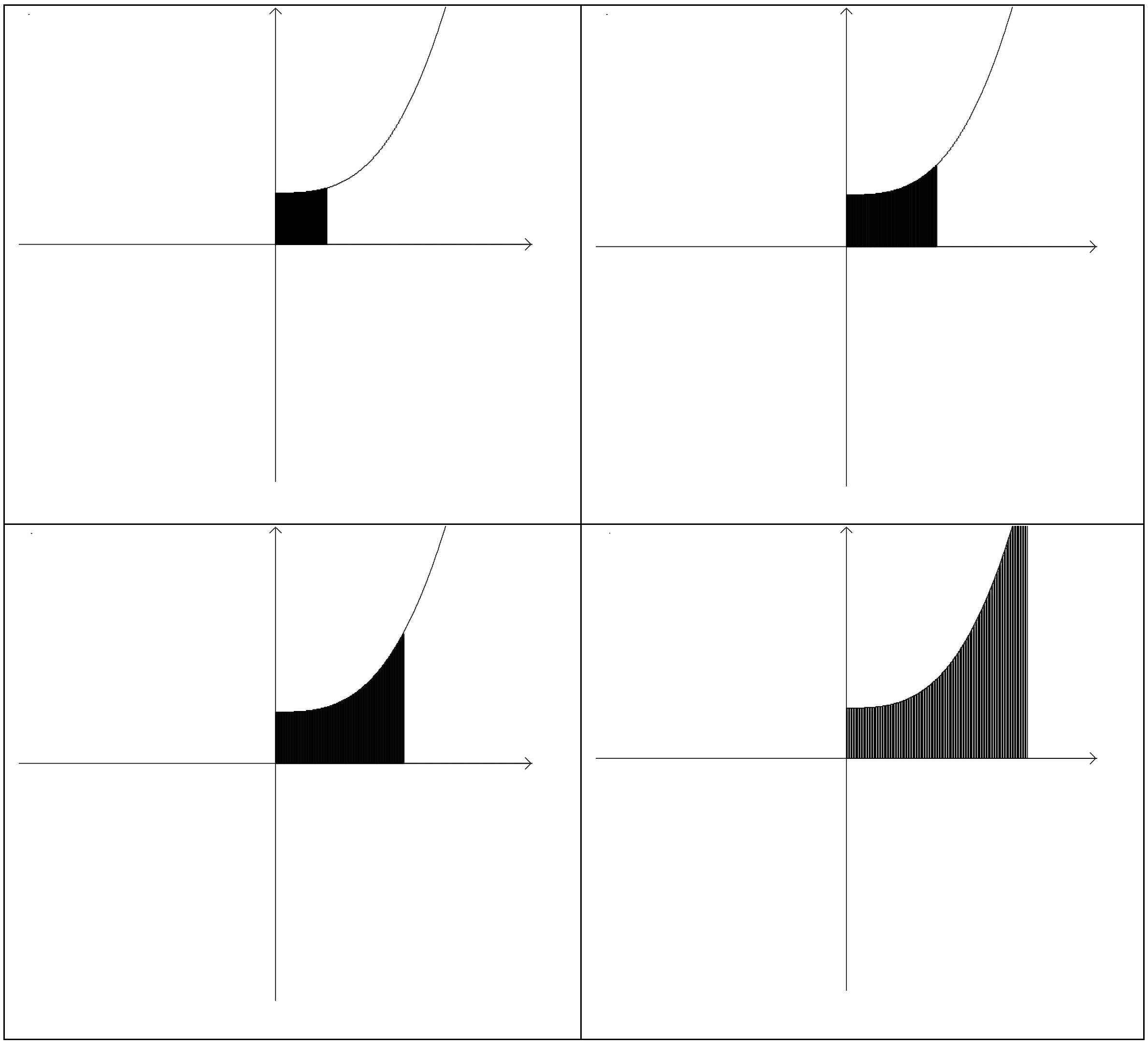


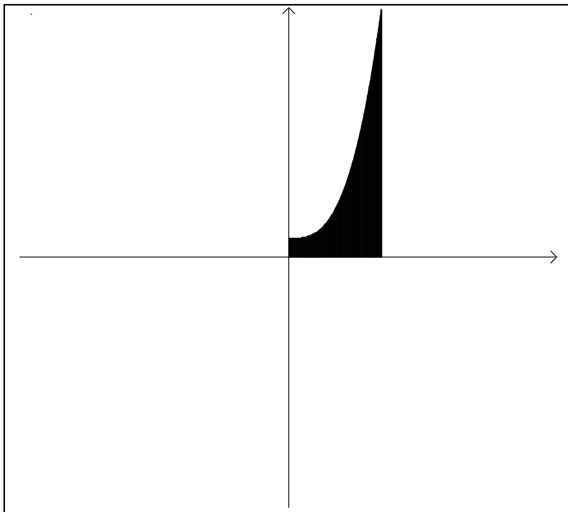
Área aproximada por excesso: 6,302 (10 divisões)

	
Área aproximada por falta: 4,951 (40 divisões)	Área aproximada por excesso: 5,472 (40 divisões)
	
Área aproximada por falta: 5,182 (400 divisões)	Área aproximada por excesso: 5,234 (400 divisões)
	A área da figura é dada por: $\lim_{n\to\infty} s(P, f) = \quad {}_{\to\infty} \quad , f)$ Ou seja, $\int_0^5 \quad \cong$

Exemplo 6. Conceito de função área

❋ Seja *f* uma função dada por seu gráfico. Vamos calcular a área da região delimitada pelo eixo horizontal e o gráfico de *f*, quando a variável percorre o intervalo de 0 a 5.

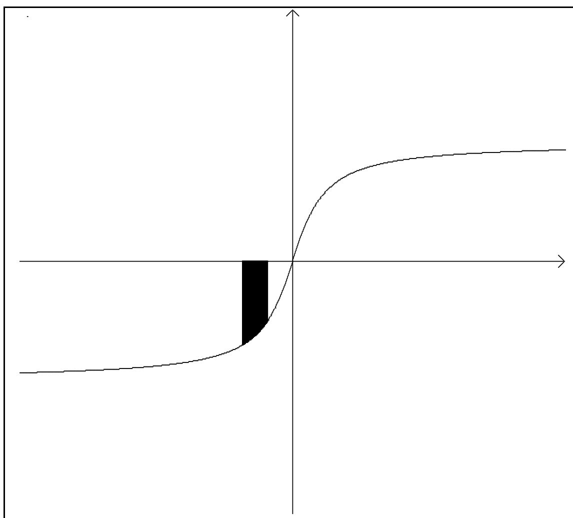




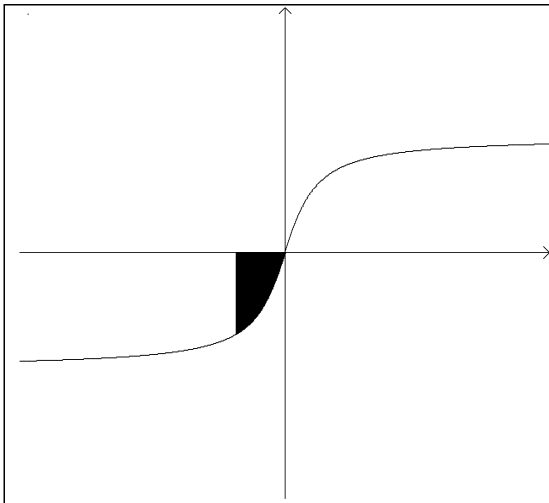
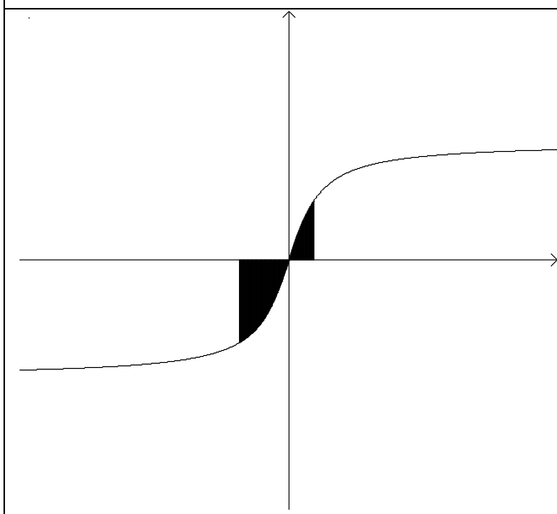
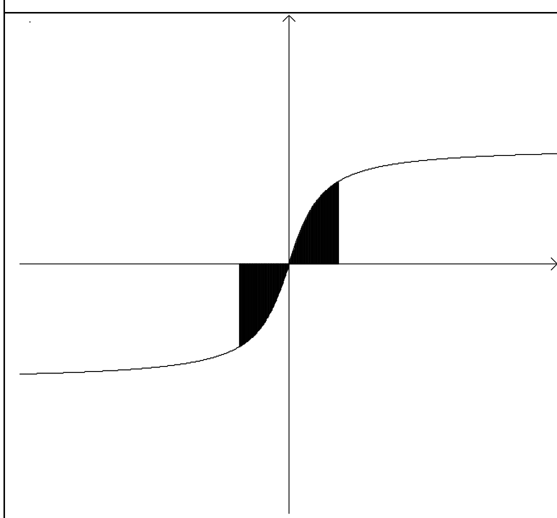
Seja $F(x) = \int_0^x$

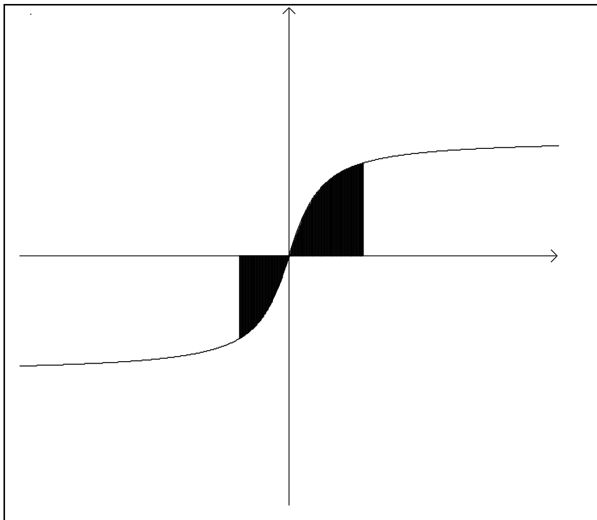
Quando $t =$ $\quad F(5) = \int_0^5$

Exemplo 7. Conceito de função integral



$\int$

	$\int_{-}^{0} \qquad -$
	$\int_{-}^{1} \qquad -$
	$\int_{-}^{2}$

	$\int$

Bibliografia

- D'AMORE, B. *Epistemologia e didática da Matemática*. São Paulo: Escrituras, 2005. Título do original: *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didatica della matemática*.
- D'AMORE, B. *Elementi d Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora Editrice, 1999.
- DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano. Registros semioticos y Aprendizajes Intelectuales*. Cali, Colômbia: Merlín, I.D. 2004. Título do original: *Sémiosis et penseé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*.
- DUVAL, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática* in MACHADO, S.D.A. (org) *Aprendizagem em Matemática*. Campinas: Papirus, 2003.

*****