Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação 2º semestre/2005
Seminários de Estudos em Epistemologia e Didática (SEED-FEUSP)
Coordenador: Nílson José Machado

O teorema de Gödel: ser ou não ser ou sei lá se é

Marisa Ortegoza da Cunha
marisaortegoza@anhembi.br

Sumário

1. O contexto histórico – as expectativas da época

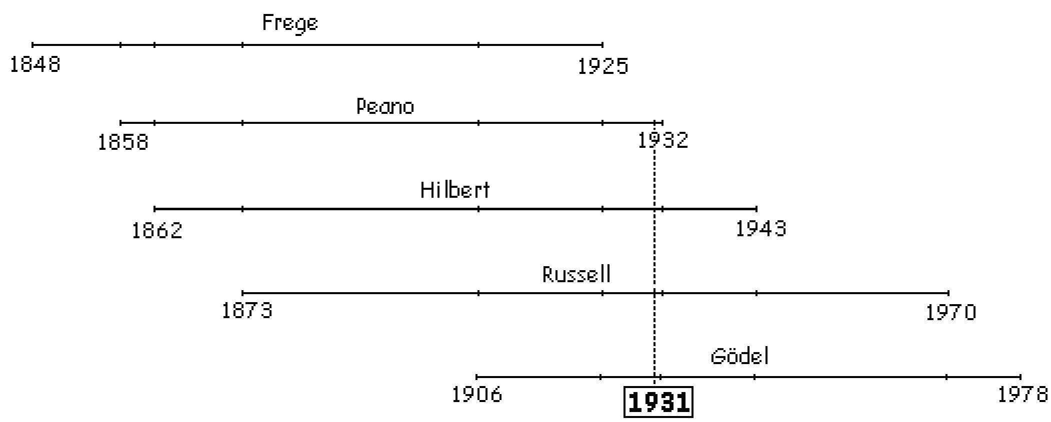
A busca de uma linguagem universal

Durante a idade média, o Renascimento e o Barroco, o latim era a língua na qual cientistas e pensadores expressavam e divulgavam suas idéias. Os filósofos do século XVII eram conscientes das limitações e complexidades impostas pelo latim, dificuldades que só poderiam ser suplantadas por uma língua "filosófica" artificial. Muitas foram as tentativas de se construir uma língua universal.

Leibniz, em especial, se dedicou com rigor e profundidade, a criar uma linguagem universal, que chamou de *mathesis universalis*. Seu ponto de partida foi considerar que idéias complexas são combinações de idéias simples, assim como números compostos são produtos de números primos. Seu projeto era ambicioso: analisar todas as idéias do espírito humano e decompô-las em idéias elementares, compondo, com estas, um catálogo. Criaria uma gramática racional para reger as concatenações lógicas entre as idéias simples e associaria a cada uma delas um número primo. Assim, cada idéia humana seria expressa, de forma inequívoca, pelo número obtido multiplicando-se os números primos associados a cada idéia simples, componente da idéia analisada. Nesse contexto, por exemplo, um enunciado envolvendo sujeito-predicado somente seria verdadeiro se o número associado ao sujeito fosse divisível pelo associado ao predicado. Dessa forma, todas as verdades conceituais estariam representadas por verdades aritméticas.

Tal projeto nunca chegou a realizar-se, nem a ser publicado. Afinal, não há um catálogo de idéias simples do espírito humano. O conhecimento de sua existência se deve ao francês Louis Couturat, que o encontrou cerca de dois séculos mais tarde. Assim como a língua idealizada por Leibniz, todos os demais projetos de uma língua universal *a priori* fracassaram. Curiosamente, o sonho da língua perfeita propiciou o nascimento de uma nova lógica.

Criação da lógica moderna



Assim como associamos a criação da Lógica Clássica a Aristóteles, devemos ao matemático Gottlob Frege (1848-1925) a fundação da Lógica Moderna (ou Lógica Matemática), por meio de seu livro *Ideografia. Uma linguagem de fórmulas, similar à aritmética, para o pensamento puro*. Nessa sua obra, surgem vários conceitos, análises e métodos presentes na lógica atual. O objetivo maior de Frege era reduzir a aritmética à lógica, definindo as noções aritméticas a partir de noções puramente lógicas e deduzindo os teoremas da aritmética a partir de princípios lógicos. Como a Lógica tradicional não lhe dava subsídios para atingir sua meta, Frege se viu desafiado a criar uma nova lógica, precisa, flexível e potente o suficiente para permitir o desenvolvimento da Matemática a partir de seus princípios. Frege propagava as vantagens de sua escritura conceitual frente à linguagem ordinária e o simbolismo de Peano.

O trabalho de Frege sofreu um duro golpe quando, em 1901, seguindo a idéia intuitiva de conjuntos que aceitava que a cada propriedade correspondesse uma classe - a classe de todas as coisas que têm essa propriedade, Russell lhe enviou o seguinte argumento, que passou a ser conhecido como *Paradoxo de Russell:*

"Consideremos a classe C de todas as classes que não são membros de si mesmas, isto é, a classe de todas as coisas que têm a propriedade de não serem membros de si mesmas. A classe C é membro de si mesma? Se não é, é. Se é, não é."

Em 1899, David Hilbert apresentou uma primeira axiomatização da geometria euclidiana, na qual explicitou conceitos considerados tácitos por Euclides, como "*estar em*" e "*estar entre*". Frege repudiou essa nova abordagem. Nessa época havia renascido o interesse pelo método axiomático, ao mesmo tempo em que entravam em profunda crise alguns de seus pressupostos básicos. Gauss já havia descoberto a possibilidade de se desenvolver geometrias distintas da euclidiana, embora não tenha publicado suas conclusões, por temer a reação de colegas conservadores. Coube a Bolyai e Lobatchevski trazerem à luz geometrias que negavam o axioma sobre as paralelas, de Euclides.

Surgem, assim, diferentes axiomas sobre as paralelas, incompatíveis entre si; não podiam ser todos verdadeiros ao mesmo tempo; não havia razão para um, em especial, ser verdadeiro enquanto os demais seriam falsos. Logo, nenhum axioma sobre as paralelas era verdadeiro por si, e se o axioma das paralelas não era verdadeiro, então nenhum outro era. A conclusão dessa linha de raciocínio é que os axiomas são meros esquemas abstratos que, em si mesmos, não são nem verdadeiros nem falsos. Esse desenvolvimento era inaceitável para os defensores da concepção clássica do método axiomático.

Graças à sua concepção abstrata de um modelo axiomático, Hilbert consegue provar a independência de um axioma em relação aos demais, mediante a indicação de sistemas satisfazendo ao conjunto dos demais axiomas, mas não atendendo àquele cuja independência se quer provar.

Em uma teoria axiomática abstrata, os teoremas são demonstrados a partir dos axiomas segundo regras de inferência estabelecidas, sem levar em conta possíveis interpretações dos mesmos, e isso não era aceitável para Frege, que só aceitava inferências cujas premissas fossem todas passíveis de receberem, inequivocamente, um juízo de valor.

O logicismo

Bertrand Russell, logo nos primeiros contatos com a geometria euclidiana, se recusava a aceitar que as demonstrações partissem de axiomas – verdades indemonstráveis. Dedicou-se então, a tentar mostrar os axiomas matemáticos, partindo da pura lógica. A filosofia russelliana da matemática, conhecida como *logicismo*, baseia-se na tese de que a matemática é inteiramente redutível à lógica, considerando duas idéias: a de que todos os conceitos matemáticos são definíveis a partir de conceitos puramente lógicos e a de que todos os teoremas matemáticos são demonstráveis a partir de princípios lógicos.

Para driblar os paradoxos – como o que ele próprio enviou a Frege, Russell criou a *Teoria dos tipos*, estabelecendo uma hierarquia entre os elementos estruturais do sistema Em sua obra máxima, *Principia Mathematica (1910-1913),* escrita a 4 mãos com Alfred North Whitehead, Russell desenvolve o programa logicista, que pretende deduzir os principais teoremas matemáticos a partir de princípios lógicos explícitos, por meio das regras de inferência da lógica formal.

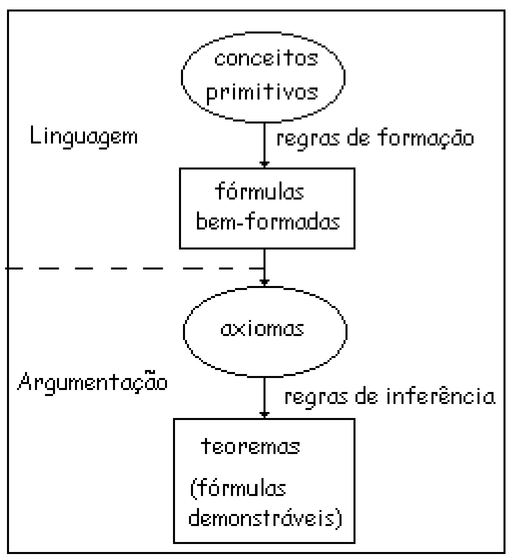
Formalizações parciais, como a da geometria euclidiana ou a de Peano, já haviam sido estabelecidas com sucesso, mas o programa formalista de Hilbert requeria a **completa** formalização da matemática clássica. Para isso, eram necessárias duas coisas: construir sistemas formais completos para as principais teorias da matemática clássica e provar a consistência desses sistemas formais.

2. Sistemas Formais

Uma teoria formal consta de:

- *conceitos primitivos*, que dispensam definições;
- *regras* que organizam o discurso e regem a formação de *fórmulas* a partir daqueles conceitos; o conjunto das fórmulas constitui a linguagem formal do sistema;
- *axiomas*, que representam verdades *a priori* ;
- *regras de inferência,* que possibilitam a demonstração de *teoremas*, que são verdades deduzíveis, demonstráveis a partir dos axiomas (e de teoremas anteriores). Teoremas são verdades *a posteriori*.

Teoria Formal:



A Geometria euclidiana foi o primeiro tema a ser apresentado como um sistema formal, cerca de três séculos antes de Cristo.

Os cinco postulados da Geometria Euclidiana são:

P1 - "É possível traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer outro."

P2 – "Qualquer segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente numa linha reta."

P3 – "Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro no ponto dado e de raio igual à distância dada."

P4 – "Todos os ângulos retos são iguais entre si."

P5 – "Se uma reta cortar duas outras de modo que os dois ângulos interiores de um mesmo lado tenham soma menor do que dois ângulos retos, então as duas outras retas se encontrarão, se prolongadas indefinidamente, do lado da primeira reta em que se encontram os dois ângulos citados".

A Geometria assim sistematizada – ou axiomatizada - por Euclides tornou-se, desde então, um modelo de organização do conhecimento em praticamente todas as áreas, por mais de 2000 anos, como bem ilustram a Mecânica de Newton, que tinha como conceitos primitivos o tempo e o espaço, por exemplo, e a Ética de Spinoza, na segunda metade do século XVII, que apresentava postulados como "O homem pensa", ou então, "O conhecimento do efeito depende do conhecimento da causa".

Giuseppe Peano, em 1899, axiomatizou a aritmética dos números cardinais. Os termos indefinidos desse sistema são "*número", "zero" e "sucessor imediato de"*. Os axiomas de Peano são os cinco seguintes:

1. "Zero é um número."

2. "O sucessor imediato de um número é um número."

3. "Zero não é o sucessor imediato de um número."

4. "Não há dois números que tenham o mesmo sucessor imediato."

5. "Qualquer propriedade pertencente a zero e também ao sucessor imediato de cada número que tenha a propriedade pertence a todos os números."

- Consistência

Um sistema formal *S* é *consistente* se não for possível termos uma fórmula F e sua negativa, ~F, simultaneamente demonstráveis no sistema. Um sistema consistente é um sistema livre de contradições.

Em outras palavras, S é consistente se existir alguma sentença de sua linguagem formal que não é demonstrável em S. De fato, caso toda fórmula de S pudesse ser demonstrada, S seria inconsistente, pois poderíamos demonstrar tanto uma fórmula F quanto sua negação, ~F; a partir de tal contradição, poderíamos provar qualquer afirmação. Por exemplo, sendo *a* e *b* dois números quaisquer, se aceitarmos que as afirmações "$a = b$" e "$a \neq b$" são ambas verdadeiras, poderemos concluir, facilmente, que $1 = 0$:

De $a = b$ segue que $a - b = 0$ (*).

Como também temos $a \neq b$, podemos dividir ambos os termos da igualdade (*) por a-b, obtendo:

$$\frac{a - b}{a - b} = \frac{0}{a - b}\text{, ou seja, } 1 = 0.$$

- Completude

Um sistema formal *S* é *completo* se, dada uma sentença F de sua linguagem formal, então ou F é demonstrável em *S*, ou a negação de F é demonstrável em *S*. Assim, um sistema formal completo dá resposta a todas as perguntas que se podem formular em sua linguagem.

Num sistema formal incompleto, existe pelo menos uma fórmula tal que nem ela nem a sua negação são demonstráveis no sistema. Logo, num sistema formal incompleto há problemas indecidíveis. Um sistema formal incompleto pode ter importância teórica, mas um sistema inconsistente não leva a parte alguma.

Por volta de 1930, o programa formalista de Hilbert estava no seguinte estágio de desenvolvimento: pensava-se que o primeiro requisito ("construir sistemas formais completos para as principais teorias da matemática clássica") já havia sido cumprido, graças à construção do sistema formal de *Principia Mathematica* e de outros resultados, como a teoria axiomática de conjuntos. Quanto ao segundo passo - provar a consistência desses sistemas formais, vários matemáticos e lógicos tratavam de solucionar. Diante da complexidade da tarefa, optaram por provar, inicialmente, a consistência de algum sistema formal da aritmética.

Em 1931, o trabalho de Gödel vem à tona e mostra a total impossibilidade de levar a cabo o programa de Hilbert.

3. O teorema de Gödel

Em seu trabalho de 25 páginas, intitulado "Sobre proposições formalmente indecidíveis do *Principia Mathematica* e sistemas relacionados", Gödel apresentou o teorema que se constituiu no mais famoso resultado matemático do século XX: a prova de que todo sistema axiomático consistente suficientemente abrangente para descrever os números naturais é incompleto.

A prova do teorema baseia-se em um paradoxo descoberto em 1905 pelo francês Jules Richard, que passou a ser conhecido como *paradoxo de Richard* :

Considere uma linguagem onde as propriedades dos números possam ser formuladas e definidas. Cada uma dessas definições contém um número finito de letras do alfabeto, de modo que podemos obter uma lista ordenada (segundo o critério de quantidade crescente de letras) de todas as definições de propriedades da aritmética. No caso de duas definições possuírem a mesma quantidade de letras, prevalecerá a ordem alfabética. Associamos ao primeiro elemento dessa seqüência, o número 1; ao segundo, o número 2 e assim por diante. Pode acontecer de o número associado a uma determinada definição possuir, ele próprio, a propriedade descrita por ela. Por exemplo, o número 17 estar associado à definição de número primo ("ser diferente de um e divisível apenas por 1 e por ele mesmo"). Também pode ocorrer, é claro, de o número associado a uma definição não possuir a propriedade descrita pela definição referida por ele. Por exemplo, o número 5 estar associado à definição de número par ("ser divisível por 2"). Temos então as seguintes definições:

- Um número é Richardiano, quando não possui a propriedade aritmética descrita na definição associada a ele, na lista descrita acima.
- Um número é não Richardiano, quando possui a propriedade por ele designada na lista descrita acima.

A propriedade “ser Richardiano” , devidamente definida por palavras, possui seu lugar na lista e recebe também um número inteiro associado, digamos, N.

O paradoxo de Richard reside no seguinte: *O número N é Richardiano?*

A conclusão é que **N é Richardiano se e somente se N não é Richardiano!!**

Note que esse paradoxo não foi construído dentro da aritmética, pois a propriedade de ser Richardiano não é uma propriedade estritamente aritmética, uma vez que se baseia numa relação entre o número e um enunciado presente numa lista construída artificialmente. Não é uma propriedade inerente ao número: houve um uso simultâneo de matemática e de metamatemáticao.

Metamatemática é o conjunto de articulações SOBRE os conceitos da matemática. Por exemplo, a fórmula “2+2=4” pertence à Matemática, enquanto que a afirmação “a sentença 2+2=4 é verdadeira” pertence à metamatemática.

A estratégia de Gödel

Gödel construiu um paradoxo, nos moldes do de Richard, porém evitando o uso de metalinguagem. Para isso, Gödel reescreveu todas os símbolos, as variáveis e as proposições matemáticas envolvendo números por meio de números naturais, chamados *números de Gödel*. [1] Isto é, ele embutiu o sistema matemático na aritmética, de forma a não ter que fazer uso de uma metalinguagem para se referir às fórmulas do sistema.

Graças a esse mapeamento, cada sentença matemática fica inequivocamente associada a um número de Gödel e, reciprocamente, dado um número de Gödel, é possível determinar a única fórmula matemática por ele designada.

A idéia da prova é a seguinte:

Suponhamos duas proposições, **p** e **q**, tais que **p implica q** (ou seja, a fórmula p prova a fórmula q).

Sejam **x** e **y** os números de Gödel associados a **p** e **q**, respectivamente.

Podemos representar o fato de **q** derivar de **p** pela fórmula **dem(x,y)**.

Podemos também construir as seguintes fórmulas, cada uma associada a um número de Gödel:

- **~dem(x,y)**, que afirma que o conjunto de fórmulas cujo número de Gödel é x não demonstra a fórmula cujo número de Gödel é y.
- **(x)~dem(x,y),** para representar o fato de que, para todo número de Gödel x, o conjunto de fórmulas associado a x não demonstra y (ou seja, que y não é demonstrável no sistema). Seja G(y) o número de Gödel associado a essa fórmula. Note que, para cada valor de y, temos um novo número G(y).
- **Gödel prova que existe y tal que G(y) = y**.

O que dizer, então, da fórmula **(x)~dem(x,G(y))**?

[1] O modo como ele fez esse mapeamento das sentenças aritméticas num conjunto numérico está descrito, sucintamente, no final do texto.

Ela afirma:
"*a fórmula de número de Gödel G(y)* (que sou eu mesma!) *não pode ser demonstrada."*

Em outras palavras, o que essa sentença afirma é "*eu não posso ser demonstrada* ". Se ela for verdadeira, isto é, se for demonstrável dentro do sistema, como uma verdade do sistema, então o que ela afirma é verdade, isto é: que ela não pode ser demonstrada!, ou seja, que ela é falsa. Por outro lado, se ela for falsa, então não poderá ser demonstrada dentro do sistema, o que torna verdade o que ela afirma e, portanto, ela é verdadeira.

Gödel conseguiu seu paradoxo e, como uma teoria consistente não comporta contradições, a teoria tem que se reconhecer incapaz de decidir se a fórmula em questão é verdadeira ou falsa. Ou seja, o sistema é incompleto.

O problema de um indecidível numa teoria poderia, em tese, ser resolvido mediante a inclusão de novos axiomas, mas pela construção realizada por Gödel, é visível que isso não resolveria o problema, pois novos indecidíveis poderiam aparecer. Citando Kubrusly [3], podemos afirmar que *o "preço da consistência é a eterna incompletude".* Se a aritmética é consistente, então ela é incompleta.

Finalmente, Gödel também demonstra que um sistema consistente não pode ter sua consistência demonstrada dentro do próprio sistema. Segundo suas próprias palavras: *"Se um sistema formal é consistente, então é impossível provar formalmente sua consistência com seus próprios meios, isto é, é impossível deduzir nele a sentença que afirma que é consistente."* [5, p.242]

O teorema de Gödel põe um ponto final às pretensões do programa de Hilbert, que acreditava que "...*todo problema matemático tem solução. Todos estamos convencidos disso."*

4. E agora, José?

O resultado de Gödel produziu um profundo efeito em vários setores do pensamento humano, como que a nos mostrar nossas próprias limitações. Mas, "*o próprio argumento de Gödel prova que não se pode opor nenhum limite antecedente à inventividade* (humana)..." [6, p.88]

Suas conclusões também se relacionam com o problema de saber se é possível a construção de máquinas comparáveis ao cérebro humano. Computadores resolvem problemas por meio de procedimentos algorítmicos, realizando tarefas simples, passo a passo, sob controle de diretivas introduzidas na máquina. Mas o teorema de incompletude, de Gödel, mostrou que há problemas que fogem do âmbito do método axiomático fixo, para os quais um mecanismo, por mais engenhoso e rápido que possa ser, não possui resposta. Embora a mente humana possa ter limitações inerentes, possui uma capacidade inesgotável de criar e incorporar novas regras. a mente humana não será tão cedo substituída por robôs.

O que podemos concluir é que *"os recursos do intelecto humano não foram, e não podem ser plenamente formalizados e que novos princípios de demonstração aguardam eternamente invenção e descoberta. ... O teorema indica que a estrutura e o poder da mente humana são* *bem mais complexos e sutis que a de qualquer máquina não viva por ora considerada. A própria obra de Gödel é um exemplo notável de tal complexidade e sutileza. É uma oportunidade, não para desanimar, mas par uma apreciação renovada dos poderes da razão criativa.*" [6, pp.89, 90]

Agora, o que afirmar sobre conjecturas como a de Goldbach ("*todo número par é soma de dois números primos*"), ainda à espera de uma decisão: será verdadeira? Será falsa? Depois de Gödel, a única coisa que podemos afirmar é: **sei lá se é...**

***

5. Bibliografia

1. BERLINSKI, David. *O advento do algoritmo – a idéia que governa o* mundo. São Paulo: Globo, 2002.
2. KNEEBONE, G. T. *Mathematical logic and the foundations of mathematics*. London: Van Nostrand, 1963.
3. KUBRUSLY, Ricardo S. *Uma viagem informal ao Teorema de Gödel.* http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/godel.html
4. MACHADO, Nílson José. *Matemática e realidade.* 5ed. São Paulo: Cortez, 1987.
5. MOSTERÍN, Jesús. *Los Lógicos*. 3ed. Madrid: Espasa e Fórum, 2000.
6. NAGEL, Ernest e NEWMAN, James R. *Prova de Gödel.* São Paulo: Perspectiva, 1973.
7. USPENSKY, V.A. *Gödel`s incompleteness theorem*. Moscow: Mir Publishers,1987.

APÊNDICE: *O sistema de numeração de Gödel*

Gödel introduziu em seu trabalho a primeira godelização – um mapeamento da linguagem formal de Principia Mathematica num conjunto numérico, atendendo a 4 requisitos:

1. Diferentes seqüências de símbolos da linguagem (sentenças da linguagem) estão associadas a diferentes números de Gödel.
2. Dada uma sentença da linguagem, é possível calcular seu número de Gödel.
3. Dado um número natural *n*, qualquer, é sempre possível determinar se ele é ou não um número de Gödel.
4. Dado um número de Gödel, é possível determinar a sentença da linguagem associada a ele.

Há muitos modos alternativos de se atribuir números de Gödel e adotar um ou outro não interfere na compreensão do argumento apresentado por Gödel. A seguir, apresentamos um exemplo simplificado da godelização usada no famoso teorema.

Os sinais da linguagem matemática são representados por números naturais de 1 a 10:

sinal	número de Gödel	significado
~	1	não
$\vee$	2	ou
$\rightarrow$	3	se...então
$\exists$	4	existe
=	5	igual
0	6	zero
s	7	sucessor
(	8	pontuação
)	9	pontuação

,	10	pontuação

- As variáveis independentes são associadas a números primos maiores que dez:

variável	número de Gödel
x	11
y	13
z	17
...	...

- Os quadrados dos primos maiores do que 10 estão associados às fórmulas matemáticas:

fórmula	número de Gödel
p	11^2
q	13^2
r	17^2
...	...

- Os cubos dos primos maiores do que 10 estão associados às propriedades dos números
- E assim por diante...

Com essa numeração, Gödel construiu uma maneira única de associar um número a uma sentença matemática.

Um exemplo: a sentença "Existe um x que é o sucessor de y" é representada, matematicamente, por $(\exists x)(x = sy)$

Cada símbolo é designado pelo seu próprio número de Gödel:

(	∃	x	)	(	x	=	s	y	)
8	4	11	9	8	11	5	7	13	9

Agora, como numerar a nossa sentença completa? Gödel pensou numa estratégia simples e inteligente: como a sentença é composta de dez símbolos, consideramos os dez primeiros números primos, elevando cada um deles à potência igual ao número associado ao elemento da sentença respectivo. O número de Gödel da sentença é o produto dessas potências.

Retomando o exemplo, o número de Gödel da fórmula $(\exists x)(x = sy)$ é

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9,$$

que identifica a sentença dada, de forma inequívoca.

Reciprocamente, dado um número natural, é possível identificar, por meio de fatoração, se é ou não um número de Gödel e, em caso positivo, identificar a fórmula associada a ele.

Por exemplo, 100 não é um número de Gödel, pois a decomposição de 100 em fatores primos nos dá $2^2 \times 5^2$, que não contém o fator 3, interrompendo a seqüência exigida. Por outro lado, 180 é um número de Gödel, pois $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, que fornece a fórmula "ou ou não". Não importa que a sentença seja desprovida de sentido, mas que possa ser escrita na linguagem matemática.