Construção do conhecimento na Matemática Superior: reflexões sobre *pensamento reverso*

Maria Cristina Bonomi Barufi[1]
Antonio Carlos Brolezzi[2]

Entendemos por pensamento reverso aquele tipo de pensamento que está envolvido nos processos em que se parte de uma situação A para chegar em outra B e depois se parte da situação B para voltar à situação A. São exemplos as ações de fazer e desfazer, construir e desconstruir, e assim por diante. No caso específico da Matemática, utiliza-se o pensamento reverso nas operações inversas, como por exemplo, somar e subtrair, multiplicar e dividir.

A idéia de reversibilidade, como sendo a possibilidade de executar determinada ação em sentido contrário ao da ação original, está presente em Piaget de maneira incisiva e fundamental. De fato, para o filósofo psicogenético,

> *a lógica na criança apresenta-se essencialmente sob a forma de estruturas operatórias, ou seja, o ato lógico consiste essencialmente em operar e, portanto, em agir sobre as coisas ou sobre os outros.* Mais ainda, *uma operação é, com efeito, uma ação efetiva ou interiorizada, tornada reversível e coordenada a outras operações, numa estrutura de conjunto que comporta leis de totalidade.* (PIAGET, p.111)

Nesse sentido, Piaget destaca a reversibilidade como o principal critério do pensamento operatório, conseqüência direta do funcionamento de um sistema lógico total.

Na construção do conhecimento matemático, desde a fase das operações concretas, as noções de fazer e desfazer caminham juntas: para cada operação matemática, define-se a operação inversa, por meio de uma adequada ampliação do universo no qual se trabalha.

Na Língua Materna, a idéia de reversibilidade precisa levar em conta o esquema sujeito/atributo. Essa estrutura lingüística é típica das línguas ocidentais e tem relações com a filosofia e a lógica do Ocidente. Segundo Chang Tung-Sun,

> (...) *a Lógica aristotélica baseia-se na estrutura do sistema de linguagem ocidental.* (...) *O tipo tradicional de proposição "sujeito-predicado" não existe na Lógica chinesa.* Assim sendo, *na medida em que o objeto da Lógica está nas regras de raciocínio implícitas na linguagem, a expressão desse raciocínio deve ser implicitamente influenciada pela estrutura da linguagem, e as diferentes línguas terão formas de Lógica mais ou menos diferentes.*(TUNG-SUN, p.177)

De fato, na Língua Materna há problemas de lógica associados à idéia de reversibilidade, e que foram explorados mesmo por Lewis Carrol em *Alice no país das maravilhas*, como é possível observar no "diálogo à mesa de chá":

Ilustração de John Tenniel (1820-1914) disponível em <http://www.victorianweb.org>

[1] crisb@ime.usp.br
[2] brolezzi@ime.usp.br

'Then ***you should say what you mean,'*** *the March Hare went on. 'I do,' Alice hastily replied; 'at least -- at least* ***I mean what I say*** *-- that's the same thing, you know.' 'Not the same thing a bit!' said the Hatter. 'Why, you might just as well say that* ***"I see what I eat"*** *is the same thing as* ***"I eat what I see"****!' 'You might just as well say,' added the March Hare, 'that* ***"I like what I get"*** *is the same thing as* ***"I get what I like"****!' 'You might just as well say,' added the Dormouse, which seemed to be talking in its sleep, 'that* ***"I breathe when I sleep"*** *is the same thing as* ***"I sleep when I breathe"****!'* ***'It is the same thing with you,'*** *said the Hatter, and here the conversation dropped, and the party sat silent for a minute.*[3]

Nesse caso, como bem podemos observar, está colocada a questão da implicação ou o sentido da sentença condicional: se A então B. O diálogo reproduzido acima mostra que, sendo essa implicação verdadeira, nem sempre se B então A, também o será. Essas questões estão presentes na Língua Materna bem como na Matemática. E mesmo no primeiro contexto o trânsito de uma implicação para a outra é feito com uma certa dificuldade pelos alunos, muitas vezes revelando confusões entre uma implicação e uma equivalência. Conforme alerta Machado,

> *Entre a Matemática e a Língua Materna existe uma relação de impregnação mútua.(...) É necessário reconhecer a essencialidade dessa impregnação e tê-la como fundamento para a proposição de ações que visem à superação das dificuldades com o ensino da Matemática.* (MACHADO, p.10)

O senso comum atribui, quase que exclusivamente, à Matemática, uma característica de exatidão, por imaginar que as considerações realizadas em seu interior primam por serem exatas, definitivas e inquestionáveis. Para Calvino, no contexto da Língua Materna, a *exatidão* significa principalmente três coisas:

> *- um projeto de obra bem definido e calculado;*
>
> *- a evocação de imagens visuais, nítidas, incisivas, memoráveis;*
>
> *- uma linguagem que seja a mais precisa possível como léxico e em sua capacidade de traduzir as nuanças do pensamento e da imaginação.* (CALVINO, p. 71)

Também é sua a crítica feroz à situação em que se encontra, segundo ele, a comunicação entre os homens, onde a necessidade da exatidão se faz cada vez mais presente, no espaço de dimensões infinitas, sem limites. Quando Calvino mostra a necessidade de exatidão nos textos, ele o faz de maneira eloqüente e fundamental, esclarecendo que a expressão lingüística necessita dessa característica, propondo então a busca incessante e cuidadosa da melhor forma de traduzir o pensamento.

> *Às vezes me parece que uma epidemia pestilenta tenha atingido a humanidade inteira em sua faculdade mais característica, ou seja, no uso da palavra, consistindo essa peste da linguagem numa perda de força cognoscitiva e de imediaticidade, como um automatismo que tendesse a nivelar a expressão em fórmulas mais genéricas, anônimas, abstratas, a diluir os significados, a embotar os pontos expressivos, a extinguir toda centelha que crepite no encontro das palavras com novas circunstâncias.* (CALVINO, p. 72)

Dessa maneira, Calvino esclarece que a exatidão deve ser necessariamente uma característica da Língua Materna, muito embora seja possível observar as constantes imprecisões no discurso bem como no texto escrito, principalmente quando se trata da sala de aula. Quando a Língua Materna é usada para exprimir fatos no âmbito da Matemática a questão se agrava pois nesse contexto a necessidade de precisão e rigor é mais imperiosa. No campo da Matemática, entretanto, ao contrário do que reza o senso comum, embora haja diversas situações em que os cálculos são exatos, há inúmeras outras em que, para se chegar à resolução do

---

[3] Carrol, L. *Alice's Adventure in Wonderland*, disponível em <http://www.bibliomania.com> Uma tradução possível: "Então você pode dizer o que acha", a Lebre de Março continuou."E vou", Alice replicou rapidamente, "pelo menos – pelo menos, eu acho o que digo – o que é a mesma coisa, você sabe." "Não é a mesma coisa nem um pouco!", disse o Chapeleiro. "Senão você também poderia dizer", completou a Lebre de Março", que 'Eu gosto daquilo que tenho' é a mesma coisa que 'Eu tenho aquilo que gosto.'" "Seria o mesmo que dizer", interrompeu o Leirão, que parecia estar falando enquanto dormia, "que 'Eu respiro enquanto durmo' é a mesma coisa que 'Eu durmo enquanto respiro!'" "Isso é a mesma coisa para você", disse o Chapeleiro, e nesse ponto a conversa parou e a reunião ficou em silêncio por um minuto." Tradução: Clélia Ramos disponível em <http://www.alfredo-braga.pro.br/biblioteca/alice.html>

problema proposto, o cálculo é simplesmente aproximado. Entretanto, em muitas atividades de sala de aula, bem como nas propostas existentes nos livros didáticos, é possível observar uma ênfase muito grande em colocações do tipo "calcule", "efetue", "resolva", "simplifique", objetivando a que o aluno, por meio de cálculos baseados nas propriedades dos conjuntos numéricos, chegue a um resultado "exato". Dificilmente, são encontradas situações abertas, nas quais a ênfase se encontra nos processos investigativos, buscando a descoberta de problemas por parte dos alunos, para posterior resolução.

A Matemática, de modo geral, fica reduzida a um conjunto de problemas para serem resolvidos, por meio de uma coleção de propriedades, lamentavelmente transformadas em regras operatórias. A validade de tais técnicas operatórias não é, normalmente, investigada. A reversibilidade desses processos dificilmente é questionada.

A Matemática apresentada na Escola Básica, freqüentemente como um conjunto de regras e fórmulas, processos mecânicos de resolução de determinados tipos de problemas, questões fechadas, com pouquíssima, às vezes nenhuma investigação, acarreta uma postura passiva por parte dos estudantes. Em particular, diante dessas circunstâncias, a reversibilidade enfocada por Piaget muitas vezes se perde.

Na Universidade, porém, a Matemática adquire um caráter distinto. É cobrada dos alunos uma experiência anterior que eles em geral não tem. Os professores chegam à conclusão que aquilo que os alunos sabem de pouco vale para o aprendizado da Matemática em nível superior. Particularmente, as dificuldades apresentadas pelos alunos na manipulação de processos reversíveis muitas vezes são diagnosticadas pelos professores como ausência de pré-requisitos, causa importante do fracasso em disciplinas que envolvem matemática de nível superior.

> *Those involved in the teaching of first-year university mathematics are often rather dissatisfied with the weaknesses they perceive in their students. (...) They lament over the thinking and working habits of their students in mathematics, their lack of organization and of mathematical rigour, as well as their difficulty in acquiring and consolidating knowledge through personal work* (GUZMÁN et al., 1998)

A exigência de pré-requisitos esbarra na questão da diversidade da natureza da Matemática no Ensino Superior. O que era exigido do aluno na Escola Básica era mais uma habilidade operacional da Matemática, e menos uma abordagem conceitual. Além disso, a própria natureza da Matemática muda na passagem para o Ensino Superior. Os resultados apresentados nas disciplinas de nível universitário são em geral fruto de motivações internas da própria construção matemática. Trata-se de uma nova cultura, em que as idéias prévias têm que ser necessariamente revistas.

> *Secondary school students often succeed in mathematics by relying on their ability to perform algorithms and in spite of a lack of real understanding of the mathematical concepts with which they are working* (GUZMÁN et al., 1998)

A fim de exemplificar as situações às quais nos referimos, um primeiro contexto, no qual a reversibilidade de um processo é fundamental, ocorre ainda na Escola Básica, quando o aluno aprende a esboçar o gráfico de uma função a partir de sua expressão algébrica. É raro observar a solicitação por parte do professor de que, a partir do gráfico o aluno encontre a expressão algébrica da função. O trânsito entre o registro algébrico e gráfico é assim realizado num único sentido, ao contrário do que precisaria ocorrer.

No curso de Cálculo inicial, normalmente desenvolve-se todo o instrumental para que o aluno seja capaz de construir gráficos de funções mais gerais, utilizando conceitos específicos. A partir do gráfico de uma função, é possível buscar o gráfico de sua derivada, trabalhando no registro gráfico. A reversibilidade do processo, ou seja, dado o gráfico da derivada de uma função, encontrar o gráfico de uma primitiva, isto é de uma função que possua essa derivada, causa estranheza e esbarra na dificuldade de "pensar ao contrário". O mesmo pode ser dito no estudo mais geral das curvas que não são gráficos de funções.

Artigue, um dos expoentes da Didática francesa, já identificava que

> *(...) high school and the university develop profoundly different relationships for common mathematical objects, for example, those of calculus – limits, derivatives, and so on. For this reason university teachers encounter serious difficulties in bringing out the knowledge of the students and are lead to the impression that the students know nothing.* (ARTIGUE, 1999)

Uma outra situação que causa um certo espanto entre os professores, refere-se à igualdade entre duas expressões. Para o professor, a igualdade é uma relação de equivalência, sendo portanto válida a propriedade simétrica, ou seja, se A=B então B=A e reciprocamente.

Para o aluno, desde muito cedo, o conceito de igualdade é manipulado em diferentes contextos. Entretanto, nas costumeiras questões do tipo, "calcule", "efetue", "resolva", "simplifique", o sinal de igualdade relaciona uma quantidade A com uma quantidade B, sempre lida da esquerda para a direita, segundo o modelo das línguas ocidentais. De fato, pensando em termos da Língua Materna, a expressão A tem função sintática de sujeito, enquanto que B tem a função de predicativo do sujeito. Como bem alerta Bardini, em sua tese de doutorado, na *Arithmetica Integra* (1544) de Stiefel, *a igualdade ocupa o papel central e a sua interpretação no registro retórico põe em evidência uma certa assimetria*. Existe um atributo a um sujeito.

Já no registro simbólico, o sinal que acabou prevalecendo historicamente foi o proposto por Recorde (1557) "========", justificado por ele com a afirmação: "*Nada é mais parecido do que dois traços paralelos à linha de escrita*". Esse sinal não foi adotado por exemplo por Descartes (1637), que preferia o "laço" $\propto$, que mantém a idéia de *orientação* para a igualdade. Essa disputa entre os dois símbolos não está contemplada na simbologia atual, pois a igualdade é interpretada em termos de relação de equivalência, com as propriedades de: reflexividade, simetria e transitividade.

Voltando ao filósofo chinês,

> *um atributo deve ser atribuído a uma substância, de modo que a idéia de substância é absolutamente indispensável ao pensamento, assim como o sujeito é absolutamente indispensável à linguagem. Por isso, na história da Filosofia ocidental, por mais diferentes que possam ser os argumentos, favoráveis ou contrários à idéia substância, o que constitui o problema central é essa mesma idéia de substância.* (TUNG-SUN, p.180)

Entretanto, essas questões estão longe de serem assimiladas diretamente pelos alunos, como Bardini registra num diálogo[4] em que um professor conversa com um aluno a respeito da expressão $6+6=6+6$.

---

[4] T:Do you think six plus six equals six plus six? Do you think that is right?
Sh: I disagree.
T: Tell me why.
Sh: Because / equals doesn't mean you put six plus six again. You're supposed to add the numbers up. / That's what equal means and you put the answer down.
T: What if it was six take away six?
Sh: Then
T: Do I have to add to get on the other side?
Sh: No, you can subtract or add to ⌈ write the number down.
T: What if it was six times six?
Sh: Then you don't put six times six again. Cause that wouldn't be the answer.
T: Okay, so you're saying it had to be the answer. Equals mean you have to have an answer on the other side?
Sh: Yeah, because / see if equals wasn't there when you put all the / when you put all the numbers together / they want to know what's the answer. And you just don't put again six times six.
T: So you're telling me it's not true that six plus six equals six plus six? You say that's not true?
Sh:Yeah because six plus six equals twelve. / Not six plus six.
T: So six plus six does not equals six plus six?
Sh:Yeah.
Ka: Yeah, it does because both of them equal the same amount. / that could be real. You could do that.
T: Could I put six plus six equals / six plus six? (T writes the following equality on the board : 6+6 = 6+6)
Ka: Yes.
Mi: Yes
S: No.
T: What is six plus six? Sh?
Sh: Six plus / six plus six equals twelve.
T: Oh, this is twelve (placing her hand over the left side of the equality) / And so what is this six plus six (placing her hand over the right side of the equality)?
Sh: Twelve.
T: (T writes 12 under each side of the equality 6+6 = 6+6) So you're telling me it's not true that twelve equals twelve? // Twelve does not equal twelve?

Dessa maneira, a dificuldade dos estudantes, que pode ser observada desde uma fase mais ou menos inicial, precisa ser, senão entendida, pelo menos admitida e respeitada. Uma sentença matemática do tipo A=B, segundo a lógica intrínseca, deveria automaticamente significar que B=A: tal fato não é óbvio nem imediato para os estudantes.

Normalmente, ao propor para os alunos a resolução de uma equação simples como $3x+2=5x$, é possível observar uma tendência generalizada em deixar a incógnita no primeiro membro, pois a resposta a ser fornecida "precisa ser x é igual a...", respeitando a estrutura sujeito/atributo. Resolver a equação encontrando $1=x$ causa um certo estranhamento entre os estudantes.

Ainda, de modo mais geral, sendo A<B, a conclusão de que B>A também não é automática, nem natural. Novamente, a estrutura da frase na Língua Materna constitui uma dificuldade para que os alunos consigam de modo natural "pensar ao contrário".

Ocorre que o curso de Cálculo, porta de entrada para a Matemática de nível superior, apresenta aos alunos diversas situações em que têm que utilizar uma estratégia contrária à que normalmente utilizavam no Ensino Básico.

Na Escola Básica, a identidade $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ é trabalhada e, em geral, os alunos chegam no curso de Cálculo, com essa questão incorporada, sem maiores problemas, naturalmente lida da esquerda para a direita. Assim, também é geral o fato de não serem capazes, com igual desenvoltura, de aplicá-la ao contrário, na forma $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. Não lhes parece natural, consideram que o professor está forçando a situação ou fazendo algum truque de mágica, ao escrever a expressão $y=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$, na forma $y=a(x+m)^2+k$, a fim de construir o gráfico da função a partir daquele mais simples de $y=x^2$, pensando em movimentos do plano como translações e reflexões.

É análoga a situação envolvendo a relação $\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a.\cos b+\operatorname{sen} b.\cos a$, largamente trabalhada no Ensino Médio. Em geral, os alunos conhecem tal relação, muitas vezes de modo apenas mnemônico, sem qualquer significado, mas dificilmente percebem que $\frac{1}{2}\cos b+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} b=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+b\right)$. Novamente, a estrutura lingüística impera.

Mais uma situação que causa estranheza para os alunos é o fato de terem sido de certa forma treinados a efetuar operações. Dessa maneira, dada uma operação entre dois números ou duas expressões, procurar o resultado é uma tendência em geral automática. Assim,

$$\frac{2}{x-3}+\frac{5}{x+5}=\frac{7x-5}{x^2+2x-15}$$

não causa nenhum espanto e é um fato naturalmente aceito, por meio das manipulações algébricas necessárias.

Entretanto, ao trabalhar a técnica de integração por meio de frações parciais, o professor percebe que os alunos não consideram natural decompor uma fração dada na soma de duas outras mais simples. Novamente, "pensar ao contrário" não é automático e a leitura da frase da direita para a esquerda causa um certo desconforto.

Ao trabalhar limites, também é possível identificar dificuldades. A igualdade existente em $\lim_{x\to a} f(x)=L$ apresenta características diferentes, pois, dependendo do caso, o valor L pode ser atingido pela função f, mas não necessariamente. Comparando com os contextos em que o sinal "=" foi sempre utilizado na Escola Básica, não é de se estranhar a dificuldade conceitual imediata com a qual os alunos se defrontam.

Além disso, no cálculo de um limite simples como $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$, a necessidade de fatorar o numerador da fração para resolver o limite

---

Sh: No. I don't get it. That's equal.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x-2) = 1$$

constitui outro exemplo de pensamento reverso.

Uma outra situação em que a estrutura lingüística da frase envolvendo o verbo de ligação *ser* gera perplexidade é o que ocorre em, por exemplo, o número *e* é irracional. Além disso, é do tipo irracional não-algébrico, ou seja, transcendente. Isso faz dele algo *especial*? Existem infinitos mais números irracionais que racionais. Existem infinitos mais números transcendentes que algébricos. O número *e* é do tipo de número mais comum que existe, muito embora esse fato não seja visível para os alunos, habituados que estão com o trabalho com os números inteiros ou quando muito racionais.

Ao dizer "o número *e* é um número transcendente", o que significa esse "é"? O verbo ser, o que faz? Identifica? Atribui características? Explica?

Essas questões não são desprezíveis ao se pensar que o verbo *ser* vinha sempre sendo utilizado na igualdade, ligando duas quantidades iguais. Entretanto, em Matemática, o verbo *ser* muitas vezes pode significar "pertence a" ou "está contido em". Por exemplo, "*e* é um número real" significa em linguagem matemática, $e \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, o que significa o sinal de igualdade "=" na expressão $e = 2,718...$[5] Na verdade, trata-se apenas de um valor aproximado do numero *e*, que as reticências ao final pretendem denotar. Esse fato necessita de um alerta específico, uma vez que as reticências, em geral, são utilizadas para indicar a repetição de determinado período numa dízima periódica. No caso o sinal "=" não significa uma igualdade!

Todo o trabalho com a determinação da função inversa em seu domínio ou em uma restrição, se encaixa obviamente na idéia do pensamento reverso.

Pensamos que a ida e a volta que caracterizam o pensamento reverso são um dos caminhos que precisam ser percorridos na busca da construção do significado em Cálculo. Nesse sentido, não se pode deixar de levar em conta a bagagem trazida pelo aluno, respeitando e buscando compreender suas dificuldades.

Essas questões permeiam os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, particularmente da Matemática superior, sendo portanto necessário encontrar contextos típicos do ensino superior em que elas sejam significativas. Não se trata, portanto, de adiar ou esconder os problemas existentes no ensino de Cálculo, ou culpar em uma formação básica deficiente. É preciso encarar os problemas e ir adiante com a Matemática superior, sem ficar barrado nos primeiros obstáculos.

Voltando à perspectiva oriental,

> *Sem o padrão sujeito-predicado na estrutura da sentença, o chinês não desenvolveu a noção de lei de identidade na Lógica nem o conceito de substancia na Filosofia. E sem esses conceitos, não poderia haver noção de causalidade, nem de Ciência. O chinês desenvolve, em lugar disso, uma Lógica correlacional, um pensamento analógico e um raciocínio relacional que, apesar de inadequados para a Ciência, são extremamente úteis em teoria sociopolítica. É por isso que, primacialmente, a Filosofia chinesa é uma Filosofia de vida.* (CHU, p.215)

Parafraseando a citação acima, a Matemática que se ensina/aprende, pode ser uma Matemática de vida?

Bibliografia

[5] e=2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416928368190255151086574637721112523897844250569536967707854499699679468644549059879316368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680331825288693984964651051... com algumas de suas infinitas casas decimais.

ARTIGUE, M. *De la Comprehension des Procesus d'Aprentissage a la Conception de Processus d'Enseignement.* Documenta Mathematica – Extra Volume ICM 1998 – III – 723-733

ARTIGUE, M. *Learning and teaching Analysis: what can we learn from then past in order to think about the future?* 2002

ARTIGUE, M. *The teaching and learning of Mathematics at the University level.* Notices of the AMS. December 1999

BARDINI, C. *Aliança sinérgica entre Epistemologia e Didática da Matemática no estudo da álgebra elementar e seus símbolos.* Tese de doutorado, Universidade Paris 7, 2003.

BARUFI, M.C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.* Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, 1999.

BARUFI, M.C. B. *Funções elementares, equações e inequações uma abordagem utilizando o microcomputador.* São Paulo: CAEM-IME-USP, 2000.

BROLEZZI, A.C. *Mudanças na Matemática da Escola Básica para o ensino superior: reflexo no uso de História da Matemática.* Anais do VII EPEM - Encontro Paulista de Educação Matemática MATEMÁTICA NA ESCOLA: CONTEÚDOS E CONTEXTOS 9 a 12 de Junho de 2004 Faculdade de Educação - USP <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/grupos_trabalho/gdt08-Brolezzi2.doc>

CALVINO, I. *Seis propostas para o próximo milênio.* São Paulo: Companhia das Letras, 1990.

CHU, Y-K. *Interação entre linguagem e pensamento em chinês* in CAMPOS, H. (org) *Ideograma.* São Paulo: EDUSP, 2000.

GRABINER, J. V. *The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weierstrass.* Mathematics Magazine. Vol. 56, no 4, September 1983

GUZMÁN, M. et al. *Difficulties in the passage from secondary to terciary education.* Documenta Matematica – Extra Volume ICM 1998 – III – 747-762

HANS, G. F. *Piaget na sala de aula.* Rio de Janeiro: FORENSE, 1970.

LACHINI, J. & LAUDARES, J. B. (Org). *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.* Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

MACHADO, N.J. *Matemática e língua materna.* São Paulo: Cortez, 1990.

PIAGET, J. *Seis estudos de psicologia.* Rio de Janeir: FORENSE, 1973

PINHEIRO, N. A. M. & MORETTI, M. T. *Conhecimento matemático reflexivo no ensino de cálculo Diferencial e integral: uma contribuição para as discussões sobre ciência, tecnologia e sociedade.* Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 29 a 1° de novembro de 2003. Santos, SP. (CD-ROM)

REZENDE, W. M. *O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 29 a 1° de novembro de 2003. Santos, SP. (CD-ROM)

TUNG-SUN, C. *A teoria do conhecimento de um filósofo chinês* in CAMPOS, H. (org) *Ideograma.* São Paulo: EDUSP, 2000.