4

3

Ensino de Matemática: novas tecnologias, novos problemas

Maria Cristina Bonomi Barufi[1]
IME-USP

Introdução

A tecnologia está presente por toda parte. Ao entrar no carro, ao virar a chave, um letreiro luminoso avisa que a porta está mal fechada. Durante o trajeto, são transmitidas mensagens de voz informando ser necessário virar à direita, ou à esquerda, ou seguir em frente... Ao descer do carro, um aviso sonoro alerta que o farol ainda está aceso... Ao fazer as compras, uma leitora ótica agiliza o processo: contabilizam-se centenas de preços em poucos segundos. Tornou-se praticamente impossível imaginar o sistema bancário, por exemplo, sem a utilização dos computadores. Também é muito difícil imaginar um engenheiro que, durante o desenvolvimento de seu projeto, esteja armado de lápis e papel a fim de resolver um cálculo integral necessário... E as crianças aparecem na escola munidas de celulares mais ou menos sofisticados nos quais muitas vezes está presente uma calculadora que, de uma forma quase natural, já aprenderam a utilizar.

Decididamente não é mais possível tentar ignorar a existência das máquinas criadas pelo homem no decorrer do último século e que estão presentes por todo lado.

Como garante o filósofo Michel Serres[2], as máquinas foram sendo inventadas para executar tarefas antes exclusivas do ser humano. As máquinas praticamente tornaram-se uma extensão do corpo, peças para além das mãos, que executam, cumprem ordens. O tempo e o esforço antes despendidos podem ser utilizados pelo cérebro humano para fazer outras coisas. Segundo uma ótica bastante negativa, poder-se-ia pensar que muitas das capacidades de um ser humano serão perdidas ou atrofiadas porque não utilizadas. Entretanto, numa ótica mais positiva, o Homem deixará de executar determinadas tarefas, ignorando, ou mesmo desprezando, algumas de suas competências e habilidades mais ou menos naturais, passando a desenvolver outras antes inimagináveis, ocupando seu maior tempo livre em novas descobertas. Nesse sentido, Serres lembra que, quando o Homem começou a andar somente com os membros inferiores, as mãos perderam a função de auxiliar na locomoção, ficando livres para desenvolver outras atividades.

---

[1] crisb@ime.usp.br

[2] Em entrevista ao programa Roda Viva da TV-Cultura - 8 de novembro de 1999.

Diante do deslumbre desmedido de muitos face às ferramentas tecnológicas, às vezes, encontramos uma certa resistência por parte de outros. A relutância na utilização da tecnologia é permeada por questionamentos do tipo: até quando e até onde o homem será substituído por uma máquina?

É preciso ter claro que um computador ou uma calculadora sofisticada são capazes de realizar determinadas tarefas algoritmizáveis[3], e, nesse sentido, são muito competentes e rápidos, resolvendo, em geral, uma série de problemas. Dizer que uma tarefa é algoritmizável significa que ela pode ser descrita por um conjunto finito de regras ou indicações, de modo que, a partir de certos dados, seja possível obter um determinado resultado. A ambigüidade não pode existir: as operações a serem realizadas devem ser tão simples e tão bem definidas que possam ser executadas por uma máquina. Esse conjunto finito de regras é denominado um algoritmo. Dessa forma, não há mágica escondida. A máquinas apenas executam um programa criado pelo homem.

Um computador poderá em poucos segundos copiar determinada obra de arte, mas é totalmente impossível que a máquina sozinha crie, faça escolhas, tome decisões: qual cor, qual textura, qual o objeto a ser representado... As escolhas e decisões são competências intrínsecas do ser humano: o progresso técnico permitirá sempre mais delegar às máquinas o trabalho físico e mesmo parte do trabalho mental. Mas ao homem sempre caberá o monopólio das atividades criativas. Isso não pode ser delegado às máquinas.

Uma nova tecnologia intelectual

O filósofo Pierre Lévy examina em detalhe, ao longo da história, segundo uma vertente antropológica, a presença marcante de formas de comunicar e conhecer, passando pela oralidade, a escrita, a impressão e a informática. Segundo ele, a passagem de uma para a outra forma não se dá por substituição, *mas antes por complexificação e deslocamento de centros de gravidade* (1995, p.10). Em cada uma delas muda a ordem de representação do saber, desestabilizando as ordens anteriores, resolvendo dificuldades e problemas, mas também criando novos questionamentos.

---

[3] No dicionário Aurélio, no verbete *algoritmo*, encontramos que no contexto da informática, é um *conjunto de regras e operações bem definidas e ordenadas, destinadas à solução de um problema, ou de uma classe de problemas, em um número finito de etapas.*

Na fase da oralidade, existia o problema da memória: a transmissão oral através de sucessivas gerações estava sujeita à capacidade de armazenamento fiel na memória do sujeito. A passagem da oralidade para a escrita resolveu o problema da memória, criando, porém, o problema da interpretação. O autor e o leitor, fisicamente separados, distantes, não podendo mais trocar informações, questionamentos, resolver dúvidas. Como interpretar? Qual a melhor interpretação? Qual a garantia de que o autor queria dizer exatamente aquilo que o leitor estava lendo? Necessariamente novas competências foram desenvolvidas: passou a ser geral a questão de aprender a ler e a escrever para ser possível a comunicação entre os seres humanos.

A passagem da escrita para a imprensa, com a conseqüente disseminação e socialização do saber, também gerou perplexidade e insegurança. Para Lévy *efetivamente, a impressão transformou de maneira radical o dispositivo de comunicação no grupo dos letrados. ... Um processo cumulativo, que iria levar à explosão do saber, foi engatilhado.* (1995, p.98)

A imprensa significou a proliferação dos textos escritos, as informações ficaram mais acessíveis a todos que soubessem ler. Grandes bibliotecas se tornaram os guardiões do saber. Entretanto, o acesso ao conhecimento ainda tinha problemas para serem resolvidos: dificuldades que iam desde a interpretação, a volatilidade das informações até a conservação do material escrito. Nem tudo estava resolvido, mas *os modos de conhecimento teórico e hermenêuticos passaram a prevalecer sobre os saberes narrativos e rituais das sociedades orais.* (Lévy, 1997, p. 38)

Na atualidade, os saberes orais, escritos ou impressos continuam existindo, não podendo ser eliminados, sequer ignorados. Entretanto, *a informática parece reencenar, em algumas décadas, o destino da escrita: usada primeiro para cálculos, estatísticas, a gestão mais prosaica dos homens e das coisas, tornou-se rapidamente uma mídia de comunicação de massa, ainda mais geral, talvez, que a escrita manuscrita ou a impressão, pois também permite processar e difundir o som e a imagem enquanto tais.* (Lévy 1995, p.117)

De um modo geral, a comunicação estabelecida na *Internet*, a rede mundial de computadores, está se tornando essencial para uns, uma rica descoberta para outros, enquanto que, para algumas pessoas, em número cada vez menor, ainda constitui uma interrogação. As comunidades virtuais estabelecem-se a partir de interesses; a proximidade física não é mais essencial, sequer necessária. Apesar de fisicamente "não-presente", uma comunidade virtual está repleta de paixões e de projetos, de conflitos e de amizades. A interação ocorre em tempo presente, simulando a presença física por meio de imagens e sons. Para Lévy *a virtualização reinventa uma cultura nômade, não por uma volta ao paleolítico nem às antigas civilizações de pastores, mas fazendo surgir um meio de interações sociais onde as relações se reconfiguram com um mínimo de inércia.* (1997, p.20)

Com a informática desenvolveu-se a capacidade de simular. Antes mesmo de executar a experiência no laboratório, é possível simulá-la no computador por meio de um programa adequado. A imaginação e a criatividade encontraram um forte aliado: o futuro e o passado ficaram mais próximos, confundindo-se com o presente; o virtual e o real entrelaçando-se.

Tudo ficou mais próximo, mais acessível: as distâncias diminuíram, o mundo ficou menor... Sem dúvida, as facilidades propiciadas em termos de comunicação e informação foram tão ampliadas que o grau de satisfação cresceu muito. Tanto a ponto de, às vezes, gerar a possibilidade de total satisfação com a simulação propiciada pelas máquinas.

Cada mudança gera inseguranças e, conforme o novo adquire status de estabilidade, a confiança cresce e há incorporação pela sociedade humana. Entretanto, o velho coexiste: histórias ainda são contadas, embora outras sejam lidas. Notícias são veiculadas pela imprensa, mas também são espalhadas oralmente, mais ou menos fiéis, mais ou menos deturpadas.

O hipertexto da atualidade explode em miríades de notícias cuja ausência de homogeneidade traz novas perspectivas para a construção do conhecimento pelo usuário. Desse modo, os computadores abriram um novo leque de possibilidades quando examinamos as inúmeras simulações que podem ser realizadas e os questionamentos que podem e precisam ser estabelecidos. Atualmente é quase impossível fazer ciência, engenharia e matemática sem ferramentas computacionais. O mesmo pode ser dito com relação à aprendizagem desses assuntos. As vantagens na utilização do computador principalmente com ferramentas exploratórias são enormes. Atribui-se um novo status epistemológico aos objetos matemáticos - pois se possibilita uma certa aproximação dos materiais concretos, ajudando os estudantes na construção de raciocínios formais - dando mesmo aos estudantes a idéia de estar usando *o estado da arte* das ferramentas científicas para aprender e simular ciência e matemática, medindo, controlando, comunicando.

A informática entretanto também encerra uma grande dificuldade. Muito embora o acesso às informações e ao saber, de modo geral, tenha se tornado muito rápido e eficiente, uma questão sempre emergente é a necessidade de localizar as informações, encontrar os dados. Um mapa é necessário. E mais ainda aonde está aquele arquivo... em qual memória: na do computador ou em qual memória externa? Quanto mais espaço, mais se possui, e quanto mais se possui mais difícil é recuperar o que se procura.

A problemática na escola

No ambiente educacional e, mais particularmente, nas disciplinas de Matemática de nível superior, observamos que, em geral, os professores se encontram presos a um conteúdo que já está estabelecido e que precisa ser ministrado, independentemente até mesmo das características da turma de alunos. Esse desenvolvimento é repetido ano após ano. Diante da realidade encontrada na sala de aula, muitas vezes com um número muito grande de alunos, o professor freqüentemente atém-se à transmissão do conteúdo, com um nível muito baixo de negociação dos significados. O precário equilíbrio do par conceitos/técnicas operatórias se desfaz no sentido de um certo tipo de reducionismo, colocando-se a ênfase nas técnicas de cálculo, a fim de garantir o cumprimento do que poderia se chamar um curso *meramente burocrático*.

Diante da tecnologia que poderia estar presente na sala de aula, o professor encontra-se numa situação delicada: se a ênfase está na aplicação das técnicas e as calculadoras ou os *softwares* resolvem esse tipo de problema, o que resta para ser ensinado? Muitas vezes o dilema é tão grande e cria um certo desconforto: o professor ignora a existência das máquinas, repetindo que o aluno precisa aprender os conteúdos - conceitos, propriedades, técnicas operatórias - e não apenas seqüências de comandos.

Figura 1: Tira do Calvin e Haroldo publicada no jornal Público, em Portugal, apud Ponte e Canavarro, 1997, p. 99.

Educação e tecnologia

Em Italo Calvino buscamos uma fonte de inspiração para examinar a parceria tecnologia e educação, principalmente no âmbito da Matemática, onde tantas dificuldades têm sido diagnosticadas por professores, alunos, e teóricos da educação.

Em *Seis propostas para o próximo milênio*, Calvino apresenta seis características para ele fundamentais que deveriam estar presentes em qualquer texto literário: *exatidão, leveza, rapidez, visibilidade, multiplicidade, consistência.* Sobre cada uma delas, na obra de Calvino encontramos um texto rico que favorece a reflexão. Na quarta capa, na apresentação do livro, encontramos que *essas virtudes parecem constituir uma declaração de ética e deverão nortear não apenas a atividade dos escritores, mas cada um dos gestos de nossa existência.*

De fato, as propostas conformadoras de Calvino parecem caracterizar de maneira brilhante o trabalho educacional, visando a construção do conhecimento em geral. Essa caracterização inclui o caso da Matemática, no processo que se desenrola na sala de aula, com o suporte das ferramentas disponíveis.

Ao alvorecer do terceiro milênio, as tecnologias da informação obrigam a olhar para o mundo com novos olhos. Não é possível permanecer com o mesmo tipo de preocupações que existiam no limiar do século XIX. Tudo ficou mais rápido, mais acessível, mais próximo. O real e o virtual se entrelaçam; nem sempre é possível fazer a distinção que, aliás, dependendo, pode mesmo deixar de ser necessária. A rede virtual podendo interligar todas as pessoas, está se tornando cada vez mais real, presente no dia a dia: digitando alguns poucos símbolos, o acesso às informações e à comunicação pode ser instantâneo. E assim, *a sociedade da informação coloca novas exigências à sabedoria humana. A sua emergência impõe como importante tarefa educativa tornar os alunos capazes de se mover à vontade no mundo da informação e tirar dele o melhor partido, apreciando a globalidade das suas implicações e intervindo nas grandes opções que terão que fazer a seu respeito. As tecnologias da informação provocam o aparecimento de* ***novos saberes*** *e* ***novas competências****, ligadas ao tratamento de informação. É necessário saber onde esta pode ser procurada, e ser capaz de a interpretar, utilizar e avaliar.* (Ponte e Canavarro, 1997, p. 23).

É interessante observar que a aula de Matemática constitui um conjunto de circunstâncias extremamente conveniente para os estudantes aprenderem a utilizar as ferramentas tecnológicas. Pois é nesse contexto, que, usando calculadoras até mesmo programáveis, interagindo com os mais variados *softwares*, cada vez mais sofisticados, eles poderão verificar a pertinência e relevância dos conceitos, não mais apenas resolver problemas de aplicação, mas avaliando se os resultados rápida e visivelmente apresentados pelas máquinas estão corretos, têm significação, são consistentes e coerentes... A tecnologia propicia o evidente manifestar-se das idéias de Calvino.

Sem dúvida alguma, a calculadora bem como o computador podem ser utilizados em sala de aula promovendo a leveza e a rapidez. Em frações de segundo, os cálculos são realizados, figuras são esboçadas, sem o peso da repetição de algoritmos, que, sem a tecnologia, precisariam ser executados manualmente pelos alunos ou pelo professor. Toda essa parte é rapidamente solucionada. Entretanto, os estudantes precisam ter certeza de que digitaram corretamente os comandos necessários. Dessa maneira, uma preocupação sempre presente não é apenas aquela da resolução de determinados problemas, mas também a observação, a análise crítica e a significação dos resultados. Por meio da utilização de máquinas para efetuar cálculos muitas vezes maçantes, poderemos nos encontrar em uma situação parecida àquela vivenciada no tempo da régua de cálculo, quando o foco se situava fortemente na interpretação dos resultados e não no cálculo em si. A questão era a de entender como a régua funcionava; o trabalho do cálculo era deixado para ela. Em seguida, interpretar o resultado, perceber a coerência, a consistência e o significado, eram tarefas exclusivas, importantes e necessárias do usuário.

A exatidão é uma característica presente na Matemática, talvez mais devido à falácia de que a Matemática é exata ou à presença exaustiva de problemas nos livros didáticos que privilegiam a existência dos números inteiros ou, quando muito dos números racionais, perpetuando as dificuldades historicamente reconhecidas quanto à existência dos números irracionais. Entretanto, problemas mais realistas e contextuados, levam a respostas aproximadas que, para serem obtidas, em muito são favorecidas pela existência de ferramentas tecnológicas.

Por outro lado, a multiplicidade de recursos disponíveis permite recuperar os conceitos matemáticos ou mesmo facilitar a própria construção de muitos conceitos por meio de uma atribuição mais clara e visível de significação. E a consistência da construção significativa do conhecimento pode ser constantemente observada.

Educação e conhecimento

Considerando que, como afirma Machado (1995), *compreender é compreender o significado*, nos processos que dizem respeito à compreensão e construção do conhecimento, não é possível deixar de lado a questão dos significados. No contexto de rede de conhecimentos e significados, onde *conhecer é conhecer o significado*, construindo nós e estabelecendo relações, podemos perceber quão fundamental seja a questão dos significados. O significado de um objeto, de uma entidade ou de um indivíduo consiste no conjunto de coisas que podem ser ditas a respeito desse objeto, entidade ou indivíduo, no interior de um determinado contexto. Nesse caso, *negociar significados de um determinado conhecimento* consiste em mostrar as suas diferentes representações, as aplicações mais diversas, exibir metáforas que podem ser muito úteis para ajudar a estabelecer relações entre o novo e aquilo que já se conhece.

A fim de negociar significados e estabelecer relações não é suficiente então apresentar uma seqüência de definições e propriedades formalmente corretas, coerentemente articuladas, com uma estrutura lógica consistente. Também não é suficiente concentrar-se em técnicas de cálculo. É uma triste ilusão imaginar que mesmo os estudantes que chegam à Universidade sejam capazes de compreender o desenvolvimento lógico e formal de uma disciplina matemática organizada segundo uma série de definições, propriedades e teoremas, e pretender que isso tenha significado para eles. Nesse caso, infelizmente, muitos deles serão apenas receptáculos de uma série de resultados nos quais acreditam porque alguém que sabe o disse. O máximo que poderão fazer é tentar repetir os conceitos que conseguirem reter, procurando reproduzi-los da mesma maneira segundo a qual lhes foram apresentados, ou então resolver problemas semelhantes aos que viram resolvidos, utilizando técnicas que, de tanto usar, conseguiram memorizar.

Com efeito, *o conhecimento não se reduz a informações: é necessário existir a capacidade de estabelecer relações conexões entre elementos informacionais aparentemente desconexos, processar as informações, armazená-las, avaliá-las de acordo com critérios de relevância, organizando-as em sistemas.* (Machado, 1995, p. 145). A cada instante, a cada nova relação percebida, a cada nova interpretação estabelecida, mudam os feixes de relações que compõem os nós/significados, atualiza-se o desenho da rede de conhecimentos e significações.

No plano individual cada indivíduo e, portanto, cada estudante é responsável pelo seu processo de mudança e evolução, ou seja, pela ampliação, refinamento e complexificação da rede de conhecimentos e significados. Dessa forma, terá uma tendência em transformar as suas propostas e crenças pessoais ao se encontrar insatisfeito com elas e se considerar as idéias selecionadas e construídas individual ou coletivamente mais poderosas ou úteis do que as precedentes. Assim a rede é enriquecida com novos feixes de relações que podem ser mais significativas do que as estabelecidas anteriormente.

Em Machado (2000) encontramos a clareza da inter-relação entre os dados, as informações, os conhecimentos e a inteligência, como constituintes da *pirâmide informacional*. Um conjunto de dados não conduz à informação. *Mas apenas as pessoas e seus interesses podem transformar dados em informações. Uma informação é um dado com relevância, com significado, que responde a algum propósito de alguém.* Assim também *o simples acúmulo de informações não conduz ao conhecimento.* O conhecimento não prescinde das informações, mas exige outro nível de articulação. *O conhecimento pressupõe o estabelecimento de uma densa rede de interconexões entre as informações, uma apreensão do contexto, uma compreensão do significado, uma visão articulada de todo o cenário.* Entretanto, *acima do nível do conhecimento situam-se as pessoas, com sua inteligência, com seus interesses, seus desejos e projetos. Em sentido humano, a inteligência pode ser diretamente associada à capacidade de ter projetos.* (2000, p. 79). Assim, o comportamento inteligente do homem pode ser associado ao seu discernimento na escolha de metas e na busca por realizá-las.

Todo o conhecimento construído pelos estudantes só tem sentido na medida em que os levar a estabelecer projetos. E para ter interesse, desejo, vontade, sonhos enfim, é preciso ter inquietações, perguntas não respondidas, curiosidade. *Ao professor compete estimular e semear projetos.* (Machado, 2000, p.82).

O papel da investigação

Um projeto nasce de uma questão, uma inquietação, uma curiosidade. Algo que persegue, incomoda. Para um indivíduo só é possível formular uma pergunta, estabelecer um problema para ser resolvido ou detalhar um projeto para ser desenvolvido, se, minimamente, ele tem conhecimento sobre o assunto em pauta. Se nada conhece é impossível perguntar. Por outro lado, segundo Bachelard, *é preciso saber colocar os problemas (...) e, na vida científica os problemas não se colocam sozinhos.* Mais ainda, *se o homem,* *animado pelo espírito científico deseja conhecer é para, em seguida, poder melhor perguntar.* (1995, p.15)

A multiplicidade de recursos, a visibilidade propiciada, a rapidez, a leveza e a exatidão de execução, a fundamental consistência, permitem e favorecem questionamentos. Por que? Qual o motivo? E, alterando esse dado, qual a alteração sofrida pelo resultado?

José Antonio Marina, em sua Teoria da Inteligência Criadora, afirma que *há uma etapa em que a pergunta "que é isto?" fica respondida com o nome da coisa. Mais adiante, há que dar mais explicações, porque a criança espera mais, necessita mais, e quando a criança se tornar um cientista voltará a fazer as mesmas perguntas e só terá mudado o vazio a preencher pela resposta, que terá se tornado um vazio cada vez maior.* (1995, p.41)

Ao ingressar na Universidade, os estudantes, em geral, não têm mais perguntas. Infelizmente, *as trinta e três perguntas por hora* que formulavam quando crianças, entre os quatro e os oito anos de idade, se tornaram reduzidíssimas, normalmente inexistentes. Em salas de aula "tradicionais", observamos a passividade e o não envolvimento circulando por entre as carteiras alinhadas da sala de aula; no melhor dos casos os alunos tentando responder as perguntas formuladas pelo professor.

O objetivo maior, entretanto, em qualquer situação de ensino/aprendizagem, é o de formar um cidadão, um ser humano com seu grande potencial desenvolvido, para o que o conteúdo trabalhado é apenas uma ferramenta. E, voltando a Marina, citando Immanuel Kant, *não é o juízo que é a atividade fundamental do entendimento, mas sim a interrogação.* Mais ainda, *ensinar a perguntar é a mais perfeita atitude educativa, e se fosse possível ensinar esta arte a uma estátua lhe haveríamos de conferir desse modo a mais completa sabedoria.* (idem, p.42)

A multiplicidade de recursos da tecnologia, a visibilidade, a rapidez, a consistência, a exatidão e a leveza das operações realizadas pelo usuário favorecem incrivelmente a formulação de perguntas, o estabelecimento de conjecturas. Cabe ao professor a importante tarefa de estimular esse tipo de postura, propiciando um ambiente em que a curiosidade impera; o desejo de criar, inventar, se torna um objetivo fundamental, constantemente buscado.

De fato, especificamente no âmbito da Matemática, Schoenfeld (1992) ressalta que *a Matemática procura compreender os modelos que permeiam o mundo que nos rodeia assim como a mente dentro de nós. Embora a linguagem da Matemática seja baseada em regras que precisam ser aprendidas, é*

importante para a motivação que os estudantes se movimentem além das regras para serem capazes de exprimir coisas em linguagem matemática. Essa necessidade sugere mudanças tanto no conteúdo curricular como no estilo de ensino. Assim é necessário colocar a ênfase:
- em procurar soluções e não apenas em memorizar procedimentos;
- em explorar modelos e não apenas em memorizar fórmulas;
- em formular conjecturas e não apenas em fazer exercícios.
[...] com essas ênfases, os estudantes terão a oportunidade de estudar a Matemática como uma disciplina exploradora, dinâmica, que se desenvolve, em lugar de ser uma disciplina que tem um corpo rígido, absoluto, fechado, cheio de regras que precisam ser memorizadas.

A fim de estimular a investigação na busca do conhecimento, sem sombra de dúvida, a utilização da tecnologia informática é potencialmente uma ferramenta valiosa e poderosa.

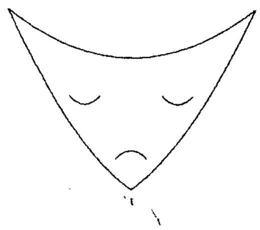
Na tentativa de exemplificação no âmbito da Matemática

Atividades a serem propostas aos alunos podem ser muito variadas. Em seguida, mostramos alguns exemplos, sem, obviamente, ter a pretensão de esgotar o assunto. O professor, enquanto pesquisador de sua própria prática, com o auxílio da tecnologia, pode criar um grande número de situações de acordo com a sua turma, os objetivos de seu projeto de ensino, as ferramentas disponíveis.

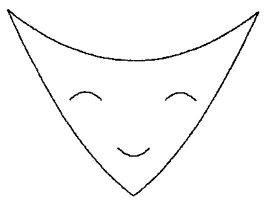
I. Um assunto importante, normalmente trabalhado em Matemática, desde a Escola Básica, mas também em nível universitário, é o que diz respeito ao estudo das funções e, conseqüentemente, de seus gráficos.

Atividade 1: Sabendo que as figuras abaixo são formadas apenas por arcos de parábolas, defina as funções e seus respectivos domínios, de modo a obter cada uma das figuras dadas.

a) Máscara da tristeza



b) Máscara da alegria



Comentário: Uma atividade desse tipo proposta aos alunos tem por objetivo o estabelecimento de várias perguntas, ou seja, o detalhamento de um pequeno projeto por parte deles. Envolve também a recuperação de todo o desenvolvimento realizado no estudo da função polinomial do segundo grau[4] $y = ax^2 + bx + c = a(x+m)^2 + k$ e de seu gráfico, como resultado de uma translação horizontal ou vertical ou mudança de inclinação do gráfico da função mais simples $y = x^2$.

Atividade 2: Crie uma figura de maneira que ela possa ser produzida através do gráfico de funções polinomiais de primeiro grau ou quociente delas, ou funções polinomiais de segundo grau. Estabeleça quais são as funções envolvidas e em quais domínios. Em seguida faça os gráficos e verifique se a figura obtida é realmente aquela desejada, fazendo os ajustes necessários. Você pode utilizar segmentos de reta verticais que, embora não podendo ser obtidos como gráficos de funções, podem ser úteis para conectar trechos de sua figura.

Comentário: Nessa atividade a idéia de estabelecer um projeto é mais central. Há um objetivo para ser alcançado. O aluno precisa ter clara a metodologia que irá utilizar: quais passos e em que seqüência. Não serve qualquer figura. Necessariamente, há de haver uma certa simplicidade e o respeito à limitação de ser possível construí-la por meio de gráficos de funções. O papel da investigação é fundamental. Existe o desejo, explícito ou não, de ser original. Evidentemente, o estímulo à criatividade dos alunos exerce uma fortíssima motivação. Numa atividade desse tipo, recuperam-se os conceitos do estudo das funções e seus gráficos na ótica dos movimentos dos gráficos das funções mais simples do mesmo tipo.

Atividade 3: Esboce por pontos os gráficos das funções $y = x.\text{sen}\, x$ e $y = x^2.\text{sen}\, x$. Em seguida, esboce os mesmos gráficos utilizando os conceitos de derivada primeira e derivada segunda de uma função. Explique, com suas palavras, as dificuldades operacionais que você encontrou.

---

[4] Em $y = ax^2 + bx + c = a(x+m)^2 + k$, os parâmetros *a, b, c, m, k* são números reais, sendo *a* não nulo.

Comentário: O intuito dessa atividade é o de mostrar aos alunos a existência de dificuldades não desprezíveis na construção desses gráficos, apesar de todo o instrumental teórico propiciado pelo curso de Cálculo Diferencial.

Atividade 4 (continuação da Atividade 3): Utilizando um programa gráfico[5], esboce os gráficos das funções $y = x.\text{sen}\, x$ e $y = x^2.\text{sen}\, x$. Ao desenhar o gráfico da primeira função, desenhe no mesmo par de eixos os gráficos de $y = x$ e de $y = -x$. No caso de $y = x^2.\text{sen}\, x$, desenhe no mesmo par de eixos os gráficos de $y = x^2$ e de $y = -x^2$. Utilize o recurso do *zoom*, a fim de visualizar desigualdades algébricas que podem ser estabelecidas para ambas as funções $y = x.\text{sen}\, x$ e $y = x^2.\text{sen}\, x$ em seus respectivos domínios. Prove, algebricamente, a validade de suas afirmações.

Comentário: Os recursos tecnológicos permitem muitas vezes auxiliar de maneira efetiva a execução de determinada tarefa. Além disso, podem tornar rapidamente visíveis determinadas propriedades, que no contexto gráfico podem ser conjeturadas. A demonstração algébrica adquire dessa maneira um significado mais importante e palpável. Esse tipo de atividade possibilita o trânsito entre registros gráficos e algébricos, que é fundamental na construção do conhecimento matemático, numa tentativa inclusive de minimizar o sério problema da distância artificialmente estabelecida entre a Álgebra e a Geometria.

II. Um outro assunto extremamente relevante no ensino de Matemática, mais ainda em se pensando no uso das ferramentas tecnológicas, é o fato de que, para qualquer máquina, os números com os quais se trabalha são apenas os números racionais. O melhor, mais poderoso, mais eficiente computador não consegue sequer escrever a representação decimal de um número irracional. A infinidade de casas decimais não cabe na memória da máquina.

Atividade 5: Suponha que você dispõe de uma calculadora na qual a tecla $\sqrt{\ }$ está quebrada. Nesta atividade você pode usar sua calculadora para outros cálculos que considerar necessários. Seja, por exemplo, o número 35 e encontre sua raiz quadrada aproximada com 3 casas decimais. Observe, para

[5] Um bom exemplo é o *software* livre Winplot, disponível no endereço http://math.exeter.edu/rparris

tanto, que $5 < \sqrt{35} < 6$, pois $25 < 35 < 36$. Você já descobriu a raiz quadrada aproximada de 35 que é 5. Como melhorar essa aproximação?

Comentário: A linguagem das máquinas trabalha com o discreto, não trabalha com o contínuo. Entretanto, não se trata de concluir daí que os números reais perdem a significação. Ao contrário, desde a Escola Básica, a questão da existência de números não racionais já é anunciada. Grandezas incomensuráveis, como o lado de um quadrado e sua diagonal, constituíram, ao longo da história, um *obstáculo epistemológico* difícil de ser superado. Entretanto, dada a visibilidade desse tipo de situação, é pertinente já nesse nível escolar, começar a investigar a existência de números não racionais e, portanto, torna-se necessário fazer com que os alunos trabalhem com aproximações. A exatidão proposta por Calvino adquire nesse contexto um novo significado. Podemos ser exatos nas aproximações!

III. No campo da Geometria Analítica e da Álgebra Linear, encontramos outra situação na qual a tecnologia pode ser uma ferramenta extremamente útil, principalmente quando enfrentamos a questão sempre mencionada por diversos professores de que os alunos têm sérias dificuldades de visualização no espaço tridimensional.

Atividade 6: Dado um sistema linear de três equações com três incógnitas, por meio de um *software* gráfico faça sua representação em R^3. Em seguida, utilizando um *software* algébrico que trabalhe com notação matricial[6], encontre a solução do sistema dado. Observe que, por meio do processo de eliminação de Gauss - escalonamento - você pode resolver o sistema. Sendo assim, em cada passo do escalonamento, faça a representação gráfica do novo sistema obtido e resolva-o utilizando o *software* algébrico, com a notação matricial. Verifique que, em cada passo do escalonamento você obtém um sistema linear equivalente àquele dado inicialmente.

Comentário: A visualização da representação gráfica do sistema linear no espaço tridimensional é importante para os alunos. Além disso, dependendo do *software* utilizado é possível recuperar conceitos já trabalhados como a equação geral e a equação vetorial do plano. Nesse tipo de atividade os alunos

[6] Novamente, um bom exemplo é o *software* livre Winmat, também disponível no endereço http://math.exeter.edu/rparris

alternam os registros gráfico e algébrico, transitando pelos dois e fazendo as conexões necessárias.

Atividade 7: Invente em cada caso, um sistema linear de três equações a três incógnitas que seja:

a) compatível com solução dada pelo ponto (a,b,c);
b) compatível com solução dada pela reta que passa pelos pontos (a,b,c) e (d,e,f);
c) incompatível.

Verifique, em seguida, através da representação gráfica que, em cada caso, o sistema criado satisfaz a condição colocada.

Comentário: Esta é mais uma atividade que recupera os conceitos envolvidos no tópico dos sistemas lineares. O fato de o aluno ser convidado a criar um sistema linear que satisfaça uma determinada condição dada torna possível verificar se os conceitos envolvidos estão realmente claros para ele. É uma forma de sair do paradigma já estabelecido e sempre presente nos livros didáticos, de, dado um sistema linear, pedir para encontrar a solução do referido sistema.

Conclusão

Neste trabalho tentamos esclarecer alguns pontos a respeito da pertinência do uso de ferramentas tecnológicas como instrumental importante na construção do conhecimento matemático.

Como vimos, as propostas de Calvino ficam evidenciadas com o uso da tecnologia. A questão é a de perceber que existem limitações e existem passos além. Ambos não podem ser ignorados. Ao contrário precisam ser esclarecidos.

É premente que o professor perceba como utilizar a tecnologia. Em momento algum no processo de construção e negociação do conhecimento o objetivo principal foi o de ganhar tempo, fazer as coisas mais depressa. A questão não é a de utilizar o computador para mais rapidamente resolver determinados problemas, sempre os mesmos... A grande questão é a de descobrir novos problemas, e instrumentalizar os alunos com todo o arsenal propiciado pela tecnologia. O objetivo maior é que eles cresçam em sua inteligência, em sua capacidade de propor projetos e, conseqüentemente, em sua capacidade de perguntar, de investigar.

Calvino, dessa forma, não terá refletido em vão.

Bibliografia

BACHELARD, G. (1938). *La formazione dello spirito scientifico.* Milano: Raffaello Cortina Editore (1995). (I ed. orig. France 1938)

BARUFI, M. C. B. (1999) *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.* Tese de Doutorado, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

BARUFI, M.C.B. (2004) La valutazione nelle discipline matematiche al livello universitario: una nuova dimensione. *La matematica e la sua didattica,* n.1, 24-46. Bologna: Pitagora Editrice.

CALVINO, I. *Seis Propostas para o próximo milênio.* Trad. de Ivo Barroso. São Paulo: Companhia das Letras, 1990.

D'AMORE, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.* Trad. de Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1995.

LÉVY, P. *O que é virtual?* Trad. de Paulo Neves. São Paulo: Editora 34, 1997.

MACHADO, N. J. (1995). *Epistemologia e Didática.* São Paulo: Cortez Editora.

MACHADO, N. J. (2000). *Educação: Projetos e Valores.* São Paulo: Escrituras Editora.

MARINA, J. A. (1995). *Teoria da Inteligência Criadora.* Trad. Moutinho, F. Lisboa: Editorial Caminho S. A.

PONTE, J. P. da e CANAVARRO, A. P. *Matemática e novas tecnologias.* Lisboa, Universidade Aberta, 1997.

SCHOENFELD A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.[7] In: D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* 334-370. New York: MacMillan.

[7] Versão disponível na web.